(Shaka 1036) was the most eminent of the Sanskrit astronomers who had just preceded the dark ages of foreign rule, and his work still stands unsurpassed in theoretical accuracy and practical precision He was followed only by about half a dozen astronomers among whom Keshava and his son Ganesha the illustrious author of the Grahalaghava were the most distinguished

Besides the domination of foreigners, there was another reason why not only the Surya Siddhanta but also other Siddhantas of a similar nature had long ceased to be studied The mental exhaustion brought on by oppressive regimes had dried up all desire for labour, accuracy and original work, so that the scientific methods of calculations which required a knowledge of trigonometry and algebraical processes yielded to other simpler devices which gave results that were only crude or approximate The Siddhantic computations no doubt entail some gigantic multiplications and divisions troublesome extractions of roots and tormenting changes of quantities which by themselves must have in no small degree contributed to their supersession But thanks to the invention of logarithms and the formation of mathematical tables the hard labour of calculation has been reduced to a minimum so that we may now expect a revival of the study of astronomy that may be called truly Indian

Even the first perusal of this Siddhanta or of a good translation of it will suffice to convince the reader that it is a work of great astronomical merit Owing to the labour-saving devices of the mathematical tables the Siddhanta may now be studied with advantage and form a text book of practical astronomey The rules of calculations are simple enough in theory they are based upon spherical trigonometry and in many ways are precisely similar to modern methods The solutions are ingenious and the results fairly accurate The data are always to be tested and corrected by actual observations and nothing is left to or borrowed from blind superstition or unintelligent dogmas It will be interesting to note in how many respects this ancient Siddhanta has anticipated modern astronomy which of course in cases where the data have to be supplied by telescopic observations alone (e g the parallax of the sun) or by observations which have to be carried on from stations separated by thousands of miles from each other has a natural advantage over its ancient prototype

The present Surya Siddhanta which has been current in India at least from the 10th century A C appears to be a revised version of the old Siddhanta of the same name The contents of the old Siddhanta have been restated in his own words by Varaha Mihira who was very probably born in Shaka 427 (505 A. C) but it cannot on that account be supposed that it was Varaha who had himself composed that Siddhanta or that it was a production of any of his contemporaries No doubt Varaha has stated the contents of it in his own favourite Arya metre but it would be highly erroneous to say or suggest that Varaha was the author of it Obviously because—

(1) The Surya Siddhanta is not the only Siddhanta which Varaha has reproduced in the Arya metre He has treated similarly all the five Siddhantas that were well known in his times He has restated the Pitamaha Siddhanta and also the Vasistha the Pulisha the Romaka and the Saura Then why should it not be said that he wrote the other four Siddhantas also? But it is impossible to make such an assertion for

that the longitude of the Sun's apogee in the Surya Siddhanta of Varaha is 80°

(7) And last but not the least is the question of the polar longitudes of a few of the Nakshatras as they are stated in the Saura of Varaha A correct interpretation of these longitudes points to the date when the observations for the Siddhanta were made This date goes back to the 1st century A. C

So we must conclude that the Surya Siddhanta included in the Pancha Siddhantika was simply a redaction of the old Siddhanta by Varaha and not an original production of his own

There were more than one versions of the old Surya Siddhanta One was that which was recast by Varaha, and the other was that quoted by Ūtpala (vide भार. ज्यो. इति. P 179)

The Present Surya Siddhanta

Now we come to the present Surya Siddhanta which seems to be a revised version of the old It is evident that the present Surya Siddhanta has replaced the ancient The earliest known astronomer who has followed the text of the present Surya Siddhanta was Vavitala Kochanna a Telegu astronomer who flourished about Shaka year 1220 (=1298 A. C) As the present Surya Siddhanta has been adopted for calculation in the far off South, this famous Siddhanta must have been known throughout India at least for about 100-200 before Shaka 220, Utpala (in Shaka year 887) quoted from the Surya Siddhanta which evidently was not the one which is now current The original Surya Siddhanta, the Siddhanta of Aryabhata and the Khanda Khadya of Brahma Gupta formed the triad under the aegis of which all the astronomical calculations were carried on till the beginning of the 10th century But as time wears away the Siddhantas however accurate their data might be, go amiss, because the planetary motions are constantly undergoing pertu rbations which the Siddhantas could not provide for So there is always a room and a necessity for a new Siddhanta or for a revised edition of the old to one

So the present Surya Siddhanta must have been modelled on the old, for, it is clear that—

(1) The old Siddhanta as quoted by Ūtpala was in Anustubha metre, the present Siddhanta also is composed in the same metre

(2) The Solar year is more accurate and very near to the anoma listic year

(3) In the mean places of the planets, the corrections suggested by Varaha have been adopted

(4) The precession of the equinoxes which although known to Varaha, but which he did not notice in his work has been accepted as a principal factor in the determination of the planetary places

(5) The old Surya Siddhanta ceases to be followed from the 10th century and the revised version has ever since then been the guiding principle of later astronomers

(6) The longitudes of the fixed stars have been stated in accordance with the same mode as that in the old Surya Siddhanta.

(7) These observations indicate the Shaka year 484 (562 A. C.) as the date of observation, while as stated above similar observations noticed in the old Siddhanta date back to the beginning of Shaka Era.

I have said that the period of the Solar year adopted in the Surya Siddhanta is more accurate than that in the old Surya Siddhanta, because it approaches the anomalistic year very closely.

The advantage is that the place of the apogee is fixed. This was the method which was adopted in the Pulisha Siddhanta. It is true as remarked by Sj. Dixit that the solar year in our Calendar is neither tropical nor sidereal But all the same it is neither unscientific nor inaccurate as we have seen, because it is anomalistic; and it is exceedingly creditable to the genius of our ancient Indian astronomers that they should have arrived at a result which if we make an allowance for the absence of telescopes, is most precise under the circumstances—the Siddhantic anomalistic year being 365 d. 6 hrs $12\frac{7}{8}$ m. while according to the most exact modern calculations it is 365d. 6h 13m. a difference only of nearly one minute !!.

A few words with regard to the accuracy of observations of the ancients may not be out of place; for, it must always be borne in mind that the observations of the ancients were carried out with the naked eye alone unaided by any telescopes of a superfine construction. Judged by this standard a discrepancy, of about 10′ minutes of space may be regarded as nothing, and every astronomer of some experience at least will ungrudingly subscribe to the sagacious remarks of Sj. Dixit, who observes :—

"With regard to this matter it may be very easy to find fault with our ancient astronomical works simply by glancing at the numbers put down on paper in black and white But no one who has had at least some experience of the great difficulty encountered in detecting the difference of 1" (second) of space even with a telescope of a very fine constructstion will never be so unjust. I myself have observed some planetary conjunctions only with the naked eye, and from such personal experience of mine, I would say without hesitation that two planets which through a good telescope would appear to be about 5′ minutes or 300″ seconds apart may be seen when viewed with the unaided eye to touch each other, (i e there would appear 1 to be no distance at all between them). The fact that the ancients had to make their observations without a telescope should be borne in mind before making any comparison of their data with the admittedly accurate results of modern astronomers and we must accord to the ancients the due meed of praise for such minute investigations of theirs" (भार. ज्यो. इति. p. 208)

Let us now take up the question of the authorship of the present or revised Surya Siddhanta When we have seen that all of the five ancient Siddhantas were completely revised and in some cases entirely recast by subsequent astronomers, we are bound to say that changes in the revised versions must relate to matters of data or method. It is well known that a great astronomer named Lāṭa flourished prior to Shaka 420 who had written an excellent treatise on Hindu astronomy from

which the elements were borrowed by later astronomers who revised the obsolete works of Pitamaha, Vasishtha and Romasha Sj Dixit surmises that to the same source may be ascribed the present revised Surya Siddhanta also I have no objection to accept this view, only that I have to add that the present Surya Siddhanta is based on the old Saura and replenished from the data supplied by Lata who had already written a commentary on Pulisha The periods of revolutions of all the planets except Jupiter have been corrected only slightly, but such corrections were suggested by Varaha himself As the present Surya Siddhanta based on the old one, has been corrected in accordance with the suggestions of Lata and of Varaha the first redactor of the Siddhanta, we must concede that the present Siddhanta is the revised version of the old Saura Siddhanta as preserved by Varaha and Lata

However another fact also should be noted that as pointed out by Sj Dixit that the place of the sun s apogee according to the current Surya Siddhanta differs from the most accurate data of the moderns only by 1 5 , when we have found that a difference even of 300 seconds cannot be detected by the naked eye ! ! We have also to take a note that the apogee of the Sun and the equinox recede from each other at the rate of 61 5 or to be more convenient at 60 per year which is exactly the rate of precession that has been laid down by our astronomers at least from the time of Munjala or even since the time of Varāha Modern Indian thinkers have inadvertently been led into the belief that the duration of the Siddhantic Solar year was put at 365d 6h and 12⅜m through some error of observation, but it will now be seen that there was nothing wrong in it as the year was anomalistic.

A space of about 5° or 6° on each side of the ecliptic constitutes what may be called the Zodiacal belt There lie within this belt a number of asterisms constellations, or groups of fixed stars which are known by the name of Naksoatras or lunar mansions They are 27 in number and the moon in her arbit passes very close to almost all of them some time or other during the year Prior to the division of the Zodiac into twelve Rasis or signs this belt was divided into 27 equal portions called the Nakshatra divisions The first division having been reckoned from that star-group which happned to be near the vernal equinox when such divisions were first formulated Before such divisions had been made the place of the sun had to be stated only approximately by observing the asterism which was on the meridian or very near to it at the time of sunrise [यत्पुण्यं नक्षत्रं तद् बट् कुर्वीतोपव्युषम् ॥ Taitt] and the moon s position was stated by a reference to that Nakshatra group to which the moon had approached very near while she was moving in her orbit But as new methods of calculation were devised, the Zodiac had necessarily to be divided into equal parts which at first were 27 or 28 in number corresponding to the number of the Nakshatra groups The initial boundary of the first Nakshatra division commenced of course as stated above from the principal Star of that Nakshatra-group which happened to be near the vernal equinox, and each division was counted from West to East along the ecliptic.

All the evidence at present available points to the conclusion that the mode of the Nakshatra division was adopted when the equinox was near the constellation of Rohini But the initial point of the first divi

sion was reckoned from the **principal star** in the Krittikas because that constellation was seen to rise in the East precisely at the Eastern point Thus two birds seem to have been killed with one stone The first position was secured for Rohini but the division was made to commence from the principal star of the Krittikas which was thus the last point of the Krittika division but the first point of the Rohini division because the vernal equinox was near Rohini Both the star groups thus occupied a predominant position and the boundaries of the Nakshatra divisions were thus fixed once for all although the practice of the counting from that Nakshatra near which the equinox was situated was invariably adhered to This may be described as the method of the **Nakshatra divisions** as distinguished from the Rashi-divisions The Nakshatra method prevailed during the Vedic and the Vedanga-period with the only difference that the **first Nakshatra division** was indicated by the position of the Winter solstice instead of the vernal equinox the boundaries of the Nakshatra divisions already fixed remaining the same as before

The Siddhanta period was the period in which the Rāshi system was introduced although the Nakshatra system could not be **abandoned**, because the calendar had adopted the luni solar months which were named after the lunar constellations or the star groups

In the old Surya Siddhanta which however, belonged to the Siddhantic period another method better suited for recording the observations of the Nakshatra stars and the planets appears to have been adopted According to this method the obervations are recorded with reference to the vernal equinox alone, while in the current Surya Siddhanta the same method is adopted but the observations are recorded with reference to the **Krittikas** in consonance with the time honoured system of the Nakshatra divisions in which the **Krittikas** stood at the end of the Krittika division and the beginning of Rohini This system not only explains the successive positions which the vernal equinox occupied but rationally connects the Vedanga period with the Pitamaha and the other Siddhantas of the Siddhanta age

Precession—a familiar Fact

It ought to be now shown how the Vedānga system of the Nakshatra in which the Nakshtras divisions were reckoned from the Principal star in the Krittikas can be connected with the Siddhantic mode in so far as reference to the precession is concerned In this respect it can conclusively be shown that at the time of the Vedanga Jyōtisha (i, e B C 1200) or even long before that period the ecliptic was divided into 27 equal portions of which the starting point was the princpal star in the Krittika constellation, so that it would naturally stand at the end of the Krittika and at the beginning of the Rohini division But the considerations upon which this conclusion is based cannot be set forth here as we are not discussing the Vedanga Jyōtisha, we must consequently seek *some other line of thought to arrive at the truth*

When the initial or the finishing limit of any Nakshatra division is not sufficiently known, we must take it that all or at any rate those stars that are prominently visible to the naked eye are included within such a division, so that (a) the most westerly star would stand near the initial limit and (b) the most easterly one would lie towards the finishing

limit When the constellation comprises only a single star we have to follow yet another method with which we are not concerned here Under any such provisional but scientific method, out of the five stars which comprise the Dhanishthā group, Betā Delphini would indicate the west most, and Gammā the most eastern limit Even the current Surya Siddhāntā has adopted* (धनिष्ठायाश्च पश्चिमा तारा) the most western Betā as the principal star in Dhanishtha, so that the beginning of Dhanishtha would be at Beta or still more correctly to the west of it, but not to the east Now the longitude of Beta (in 1937 A C) is about 315°, and at *the time of the Vedanga it was avowedly 270°, for, the winter solstice* is always 270° to the east of the vernal equinox,

Hence the quantity of precession from the time of the Vedanga to the present day is 45° or a little less than that but not more, and the number of years elapsed since then is ($71.5 \times 45 =$) 3217 The date of Vedanga must be fixed between 1280 and 1200 B C because we have to follow the provisional method of research As Varaha lived in 500 A C the precession from 1200 B C to 500 A C would amount approximately to 24°, and as the limit indicated by years is between 1200—1280 B C, we have to accept 24° as the amount of the precession of the Ayanas from the date of the Vedanga to that of Varaha It is most gratifying that precisely this amount of precession has distinctly been observed and affirmed by Varaha himself At first he has clearly and definitely asserted the fact of precession Sj Dixit while discussing the precession of the Ayanas remarked that "Nothing has been stated in the Pancha Siddhantika about precession" If Sj Dixit had in his mind the rate of precession, he is right, but if he meant that even the fact of precession was not referred to, his remark is an instance of obvious oversight and nothing else, for in the Pancha Siddhantika itself Varāha has made a note of the fact of precession when he says —

आश्लेषार्धाद् आसीत् यदा निवृत्ति किलोष्णरश्मेश्च ।
युक्त-मयनं तदासीद् साम्प्रत-मयनं पुनर्वसुत ॥

"When the sun used to recede (or turn back to the South) from the middle point of (divisional) Ashlesha, the middle of Ashleshā was rightly the solstitial point, but now (in Shaka 427) the solstitial return takes place from Punarvasu"

In the above quoted verse it is not stated from what point of Punarvasu the sun began to turn to the South Yet it can be ascertained from a Couple of verses in the Brihat Samhita of which the author is Varaha himself In Chap III, 1, 2 of that work he says —

आश्लेषार्धाद् दक्षिणमुत्तर-मयनं रवे-र्धनिष्ठाद्यम् ।
नूनं कदाचिद् आसीत् तेनोक्त पूर्वशास्त्रेषु ॥ १ ॥
साम्प्रत-मयनं सवितु कर्कटकाद्य मृगादितश्चान्यत् ।
उक्ताभावो विकृति प्रत्यक्ष-परीक्षणै र्व्यक्ति ॥ २ ॥

"The Summer Solstice situated in the middle of Ashleshā, and the Winter Solstice in the initial point of (divisional) Dhanishtha-such a position did really exist in former times, and hence it is mentioned in the ancient Shastras"

"But now summer solstice occurs in the beginning of Cancer, and the other (i e winter Solstice) in the beginning of Capricorn

"Denial of what I (Varāha) have stated would be unreasonable, for, it can be verified by actual observation"

Nothing is left in doubt by Varāha in the aforesaid verses In the time of Varaha (i e, in 500 A C) the solstice in Punarvasu coincided with the beginning of the sign of Cancer which is 90° to the east from the initial point of Mesha, and the divisional part corresponding to 90° from the beginning of (divisional) As vini is $\frac{3}{4}$ of Punervasu, so Punarvasutas means at the 4th charana of (divisional) Punarvasu This would set at rest all unfounded fancies and conjuctures

Another important fact confirmed by Varaha is that even the divisional Nakshatras named in serial order from the Krittikas were the same fixed or unchanged divisions as they had been at the time of the Vedānga itself For, had the names of the Nakshatra-divisions undergone any change to keep accord with the change of position of the equinox, (the divisional) Punarvasu would, even in the time of Varaha also, have been still called Ashleshā But now we have seen that the Nakshatra divisions also were as fixed as the stars themselves and hence alone it was possible that every change in the positions of the equinox and the solstices should have been duly observed, noted and thoroughly comprehended by Varāha as a familar fact of procession—which it was the object to explain to the general reader

We have just considered the method by which it could fairly be proved independently that since the time the winter solstice was in Betā Delphini or a degree or two to the west of it, (that is since B C 1280 or 1200) the same solstice had receded about 24° (or a little less than that) down to 500 A C the time when Varāha lived This is not an insignifant circumstance, when we look back to the great period of 3200 years that has since elapsed But a still more fortunate coincidence is that Varāha himself has unequivocally stated the number of degrees through which the Ayanās (or the solstices) had receded since the Vedanga period Such a statement of Varāha himself—one of the greatest of astronomers,—was first brought to light by the late lamented Prof V B Naik M A of Fergusson College Poona, and a great astronomer of Mahārāshtra He quoted some stanzas from the Pancha *Siddhāntikā at the Panchānga Conference held at Poona in 1925* The full significance of the quotation was not properly attended to at the time, merely because the Conference never reached the stage at which the stanzas could be fully discussed They have simply remained on record only for the benefit of those who would care to grasp their implications I would therefore take this opportunity of qnoting and attempting to interpret one of them in accordance with its astronomical aspect. The text is rather corrupt and I adopt Pandit Sudhākara Dvivedi's emendations wherever necessary

It is not requisite that the verses should be discussed at length here in these introductory remarks It would in my opinion suffice if I could draw attention to that verse of Varāha in which he has stated definitely the precession reached, since the time of the Vedāngas to his own day (i. e to 500 A C) This amountof precession he has stated

in the following stanza which immediately follows the verse" "आश्लेषार्धात्" quoted above. The stranza under discussion is

" विपरीतायनपाते यदार्कभागांश-शशिरवि-क्षेपः ॥ भवति सदा व्यतिपातो दिन-कृत्-शशियोग चक्रार्द्धे ॥.

In this verse the precession is stated by Varāha to be equal to the greatest declination of the Sun. Varāha has put the greatest declination in his time roundly at 24° which according to the correct data was nearly 23° 35′ in 500 A. C. This definite mention occurs where Varāha has laid down two rules, one applying to the time of the Vedānga and the other to his own when the equinox was in the beginning of As'vini and the Ayanāmshās were nil. When the equinox was at the beginning of Mesha or As'vini as was the case at the time of Varāha, he has stated that Vyatipāta occurs when the declinations of both the sun and the moon being equal, the sum of their Longitudes is together equal to 180°. But-says Varāha "At the epoch of the Vedanga when the summer solstice was in the middle of As'hlesha the Ayanamshās being negative (विपरीतायनपाते) they have to be subtracted from the longitudes of both, or added to six signs; and the amount of these Ayanāmshās was according to Varāha equal to अर्कभागांशाः or the greatest declination of the sun which was roundly put at 24° by Varāha but which really was about 23° 35′ (in 500 A. C.) Evidently therefore, the date of the Vedanga according to Varāha was 1700 years before his time (i. e. B. C. 1200). Consequently the initial point of (divisional) Dhanishthā could never be more distant than (270° + 23° 35′ =) 293° 35′ from the beginning of Mesha or As'vini. The precession from the beginning of Mesha which concided with equinox in Shaka 450 to the present day *being about* 19° 38′, *the western limit of (divisional) Dhanishthā must* be (293° 35 + 19° 38′ =) 313° 13′ from the equinox. The longitude of Betā Delpheni our provisional limit is at present 315° 20′; we are, therefore, in a position to declare confidently that the western limit of (divisional) Dhanishthā is not less than at least 2° 7′ to the west of Betā Delphini. This initial point of Dhanishthā also indicates that these Nakashatra divisions were started from the principal star in the Krittikās and from no other.



GLOSSARY.

The figures refer to the pages of the Book.

Altitude	26, 29, 57......	उन्नतांश
mplitude	89, 96......	आग्रा; औदोयिक दिगंश,
Apse	54.. ...	उच्च
Aphelion	49, 54......	दूरोच्च, मंदोच्च,
A Perihelion	P. 53	नीचोच्च,
Ascendant (on the horizon)......		उदयलग्न
Ascensional difference	64, 65, 66....	चरखंड, चरांश
Ayanamshas	78, 79......	अयनांश
Cardinal points	76	प्राच्यादि बिन्दू
Civil Day	63.	सावन दिवस
Circumference of the Earth	16	भूपरिधि
Declination	26, 29, 44.	क्रान्ति (ध्रुवप्रोत)
Elongation	45, 51, 53	शीघ्रफल
Equation of the Centre	45, 49, 53.	मन्दफल
Equation of time	56, 57	वेलान्तर
Prime Horizon	65	निरक्ष क्षितिज
Equinox	27, 29.	संपात बिन्दू
General Information	20-24, 26-29, 54-55, 69, 72, 92, 103, 104.	
Gravitation and centrifugal force	34.	गुरुत्वाकर्षण आणि केन्द्रापसरण शक्ति
Horizon	26-29.	क्षितिज
Latitude (of planets)	29	शर
Angle of Inclination (Mean)	19	विक्षेप
Angle of Inclination (True)	61	परमशर
Latitude (of a place on the Earth)	17	अक्षांश
Longtitude (of a place on the Earth)	17	रेखांश, रेखान्तर, देशान्तर
Longtitude of the Sun	83, 96	रवीचा भोग
Meridian (Prime)	17	मध्यरेखा, मुख्य याम्योत्तर
Meridian Transit	55, 85.	याम्योत्तर लंघन
Nodes	35	पात,
Moon's Node		राहु (बिन्दू)
Obliquity	43	आक्रमतिर्यक्त्व, परमक्रान्ति
Palabha (equinoctial)	80	पलभा, अक्षांश भुजज्या
Perihelion See Apse.		
Pole of the Equator	26	(विषुव) ध्रुवबिन्दू
Ecliptic	26-29	कदंबबिन्दू
Prime Vertical	69-72.	पूर्वापरवृत्त

शुद्धिपत्र

पान ४, श्लो० १७ याचे भाषान्तर :
" अर्थात् त्या दशांश भागाला " ह्याबद्दल
" महायुगाच्या दशांश भागाला " असें वाचावें.

पान ४, ससन्धयस्ते मनवः हा १९ वा श्लोक,
श्लोक १८ याचे पुढें लगेच वाचावा.

पान १७, पहिल्या ६ व ७ ह्या ओळींमध्यें जेथें " लम्बज्या " असा शब्द आहे तेथें
" लम्बांश " असें वाचावें.

ओळ २० " Meridian " याबद्दल " Prime Meridian मुख्य " असें वाचावें.

पान २२, ओळ १७, यात " ३१॥ पळे म्हणजे " याच्यापुढें "उच्चानुवर्ति असल्यानें"
असें वाचावें.

पान ५५ श्लोक ४६, स्पष्टीकरण पॅरा १ च्या शेवटीं " ग्रहभुक्तिप्रमाणेंच स्थिरतारांच्या
भासमान परिभ्रमण कालासंबधानेंहि ह्या श्लोकाची योजना करतां येते "

पान ९७ श्लोक ४२ यात
त्रिभुजकर्णार्ध म्हणजे परमक्रान्तिद्युज्या अथवा Cos obliquity; आणि स्वकीय
द्युज्या म्हणजे Cos declination असें समजावें.

॥ श्रीगणेशायनम ॥

सूर्यसिद्धांत

वागीशाद्याः सुमनसः सर्वार्थाना मुपक्रमे ।
यंनत्वा कृतकृत्याः स्युःस्तं नतोस्मि गणेश्वरम् ॥
यथा शिखा मयूराणा नागाना मणयो यथा ।
तद्वद् वेदाङ्ग शास्त्राणा ज्योतिषं मूर्धनि स्थितम् ॥

अध्याय पहिला (मध्यमाधिकार)

अचिन्त्याव्यक्त-रूपाय निर्गुणाय गुणात्मने ॥
समस्त-जगदाधार-मूर्त्तये ब्रह्मणे नमः ॥ १ ॥

ज्याचें चिन्तन किंवा आकलन करितां येत नाहीं, जें अव्यक्त आणि निर्गुण असूनहि सगुण रूपानेंच व्यक्त होतें, आणि ज्याचा सर्व विश्वाला प्रत्यक्ष आधार आहे अशा परब्रह्माला नमस्कार असो १

अल्पावशिष्टे तु कृते मयनामा महाऽसुरः ॥
रहस्यं परमं पुण्य जिज्ञासुर्ज्ञानमुत्तमम् ॥ २ ॥
वेदाङ्गमग्र्यं अखिलं ज्योतिषा गतिकारणम् ॥
आराधयन् विवस्वन्तं तपस् तेपे सुदुश्चरम् ॥ ३ ॥

कृतयुग सपत आलें होतें, थोडा अवधि शिल्लक होता अशा वेळीं मय नावाचा जो एक दिव्यात् असुर त्यानें केलें काय तर वेदाच्या सहा अगांतील श्रेष्ठ अग आणि सर्व ग्रह नक्षत्रादिकांच्या (वास्तविक आणि भासमान) गतींच्या कारणाचें स्पष्टीकरण ज्यांत आहे, असें गूढ आणि अत्यत पुण्यकारक असें ज्योतिषशास्त्र जाणण्याच्या इच्छेनें उत्तम प्रकारचें परतु फार अवघड असें तप करून सूर्याची आराधना केली २, ३

तोषितस् तपसा तेन प्रीतस् तस्मै वरार्थिने ॥
ग्रहाणा चरितं प्रादान्मयाय सविता स्वयम् ॥ ४ ॥

विदित स्ते मया भावस्तोषित-स्तपसा ह्यहम् ॥
दद्यां कालाश्रयं ज्ञानं ग्रहाणां चरितं महत् ॥ ५ ॥
न मे तेजः सहः कश्चि दाख्यातुं नास्ति मे क्षणः ॥
मदंशः पुरुषोऽयं ते निःशेषं कथयिष्यति ॥ ६ ॥
इत्युक्त्वान्तर्दधे देवः समादिश्यांशमात्मनः ॥
स पुमान् मयमाहेदं प्रणतं प्राञ्जलिस्थितम् ॥ ७ ॥
शृणुष्वैकमनाः पूर्वं यदुक्तं ज्ञानमुत्तमम् ॥
युगे युगे महर्षीणां स्वयमेव विवस्वताः ॥ ८ ॥

त्या तपानें सूर्य नारायण संतुष्ट होऊन प्रसन्न झाले. आणि वर मागणारा जो मयासुर त्याला स्वतः सूर्यानेंच ग्रहादिकांच्या स्थिति गतिचें ज्ञान सांगितलें ४.—सूर्य म्हणाला. तुझा उद्देश मला कळला आहे, आणि तुझ्या तपानेंहि मी संतुष्ट झालों आहे, म्हणून कालाच्या आधारावर उभारलें गेलेलें, आणि ग्रहादिकांसंबधींचें उत्तम असें जें ज्योतिषशास्त्र तें मी तुला सांगतों ५— परंतु माझें तेज कोणालाहि सहन होत नाहीं (मग तुलाच कसें सहन होईल !) आणि शिवाय मला तितका वेळहि नाहीं; म्हणून माझ्याच अंशानें अवतीर्ण झालेला एक ज्ञानी पुरुष तें शास्त्र तुला समग्र शिकवील. ६—असें बोलून सूर्यानें आपल्याच अशानें अवतीर्ण झालेला तो ज्ञानी पुरुष मयासुरास भेटविला आणि मग सूर्य नारायण अन्तर्धान पावला. तेव्हा हात जोडून पुढें उभा राहिलेल्या मयासुरास तो पुरुष म्हणाला कीं:—७. प्रत्येक युगांत स्वतः सूर्यानेंच मोठमोठ्या ऋषींनां उत्कृष्ट असे ज्योतिषशास्त्र शिकविलें तें आता तूं लक्ष पूर्वक ऐक. ८

शास्त्रमाद्यं तदेवेदं यत् पूर्वं प्राह भास्करः ॥
युगानां परिवर्तेन कालभेदोऽत्र केवलम् ॥ ९ ॥

अगदीं मूळचें जे शास्त्र सूर्यानें पूर्वी ऋषींना सांगितलें तेंच मीं आतां सांगत आहे. परंतु युगांचा बदल होत असल्यामुळेंच कालगणना पद्धती मात्र बदलली जाते, ती आतांच्या युगानुरूप बदलली आहे. ९

स्पष्टीकरणः— श्लोक २ ते ९ ह्यावरून हें आपल्यास खात्रीपूर्वक समजतें कीं असुर लोकांना म्हणजे असीरियन लोकांना ज्योतिषाची माहिती झाली ती आमच्या ऋषिंच्या कडूनच झाली. आम्हींच हें शास्त्र पाश्चात्यास शिकविलें. मयासुर हा एक विद्वान् असीरियन हिंदुस्थानात येऊन इकडे वेदांग ज्योतिष आणि सिद्धांत ज्योतिषाचा अभ्यास करून त्यान आसारयांत त्याचा प्रसार केला.

लोकानामन्तकृत् कालः कालोऽन्यः कलनात्मकः ॥
स द्विधा स्थूलसूक्ष्मत्वाद् मूर्तश्चामूर्त उच्यते ॥ १० ॥

काल शब्दाचे दोन अर्थ आहेत. ‘ वस्तु मात्राचा नाश करणारी शक्ति हा काल शब्दाचा पहिला अर्थ. त्यालाच " अन्तक " म्हणतात. ज्याच्या योगानें भूत–वर्तमान–भविष्य

अशी गणना करता येते तो कलनात्मक काळ हा दुसरा अर्थ. कलनात्मक काळ हा स्थूल आणि सूक्ष्म, किंवा मूर्त आणि अमूर्त ह्या प्रमाणें दोन प्रकारचा आहे १०

प्राणादिः कथितो मूर्त स्त्रुट्याद्योऽमूर्तसंज्ञकः ॥
षड्भिः प्राणै विनाडी स्यात् तत्षष्ट्या नाडिका स्मृता ॥ ११ ॥
नाडी-षष्ट्या तु नाक्षत्रमहोरात्रं प्रकीर्तितम् ॥
तत् त्रिंशता भवेन्मासः सावनोऽर्कोदयै स्तथा ॥ १२ ॥

श्वासोच्छ्वास हा मूर्त स्वरूपी म्हणजे प्रत्यक्ष समजू शकणारा असा काळ; आणि विपळें, पळें, घटका इत्यादि कालगणनात्मक पद्धति हा अप्रत्यक्ष किंवा अमूर्त काळ होय. सहा श्वासोच्छ्वास झाले म्हणजे तितक्या कालाला एक पल असें म्हणतात; ह्या प्रमाणें साठ पळांची (३६०-श्वासोच्छ्वासांची) एक नाडी म्हणजे घटिका होते. (११) ह्या प्रमाणें साठ घटिका झाल्या म्हणजे नाक्षत्र मानाचा एक दिवस (अहोरात्र) होतो. अशा तीस नाक्षत्र दिवसांचा एक नाक्षत्र मास होतो आणि सूर्योदयाची संख्या तीस पूर्ण झाली म्हणजे त्याला सावन महिना म्हणतात (१२)

ऐन्दव-स्तिथिभि-स्तद्वत् संक्रान्त्या सौर उच्यते ॥
मासै-र्द्वादशभि-र्वर्षं दिव्यं तदह-रुच्यते ॥ १३ ॥
सुरा-सुराणामन्योन्यमहोरात्रं विपर्ययात् ॥
तत् षष्टिः षड्गुणा दिव्यं वर्षमासुरमेवच ॥ १४ ॥

चान्द्र तिथि तीस पूर्ण झाल्या म्हणजे तो चान्द्रमास; आणि प्रत्येक संक्रांतिला जो एकेक महिना पुरा होतो तो सौरमास होय. (बारा चान्द्र मासांचें चान्द्र वर्ष आणि) बारा सौर मासांचें एक सौर वर्ष होतें. मानवाचें एक वर्ष म्हणजे देवांचा १ दिवस, देवांचा जो दिवस ती असुरांची रात्र आणि असुरांचा दिवस तो देवांची रात्र या प्रमाणें उलट सुलट प्रकार आहे. या प्रमाणें देवांचे ३६०-दिवस झाले म्हणजे त्यांचे वर्ष होतें त्याला दिव्य वर्ष म्हणतात. तसेंच असुरांचेंहि वर्ष होतें.

तद् द्वादशसहस्राणि चतुर्युगमुदाहृतम् ॥
सूर्याब्दसंख्यया, द्वि-त्रि-सागरै रयुताहतैः ॥ १५ ॥
सन्ध्या सन्ध्यांश सहितं विज्ञेयं तत् चतुर्युगम् ॥
कृतादीनां व्यवस्थेयं धर्मपादव्यवस्थया ॥ १६ ॥
युगस्य दशमो भागः चतुस्त्रि-द्व्येक-सङ्गुणः ॥
क्रमात् कृतयुगादीनां षष्ठांशः सन्ध्ययोः स्वकः ॥ १७ ॥

देवांची १२००० बारा हजार वर्षें झाली म्हणजे मानवी (कृतत्रेतादि) चार युगें होतात, किंवा ४३२ अयुत वर्षे (अथवा ४३२०००० मानवी वर्षे) झाली म्हणजे एक महायुग किंवा चार युगांची एक चौकडी होते. प्रत्येक युगाच्या आरंभी आणि शेवटी संधिकाल असतो. तो

संधिकाल कृतयुगाच्या आरंभीं आणि शेवटीं मिळून जितका असतो, त्याच्या पाऊणपट सन्धिकाल त्रेतायुगाचा, अर्धा द्वापराचा आणि पाव हिस्सा कलिचा संधिकाल असतो. ह्याप्रमाणें कृताच्या आरंभीं ४०० (दिव्य वर्षे) आणि अंतीं ४०० वर्षे संधिकाल असतो. नंतर त्रेताचा आरंभ संधि ३०० (दिव्य वर्षे) आणि अंतसंधि ३०० (दिव्य) वर्षे पुढें द्वापराचे दोन सन्धि प्रत्येकीं २०० (दिव्य) वर्षांचा; तसेंच कलिचे दोन सन्धि प्रत्येक १०० दिव्य वर्षांचा; मिळोन एकंदर संधिकाल २००० (दिव्य) वर्षांचा आणि प्रत्यक्ष युगकाल १०००० (दिव्य) वर्षांचा या प्रमाणें १२००० (दिव्य) वर्षे किंवा मानवी सौरवर्षे ४३२०००० झालीं म्हणजे (संधिकाल धरून) एक चौकडी अथवा महायुग होतें. प्रत्येक युगान्तराला ज्या प्रमाणें "धर्म" पाव हिस्सा कमी होतो. तशींच व्यवस्था युगांची आणि सन्धिकालाचीहि आहे. १६.

प्रत्येक युगाचे सन्धिकाल धरून जितकें युगमानाची (जितकीं वर्षे) होतात त्याच्या सहा-व्या हिस्सा इतकी वर्षे दोन्हीं सन्धिकालाचीं मिळोन होतात. किंवा सन्धिकाल सोडून युगाचीं जितकीं वर्षे त्याच्या दहाव्या हिस्सा इतका एकेक सन्धिकाल असतो. अर्थात् त्या दशांश भागाला अनुक्रमें ४, ३, २ ह्यांनीं गुणिलें असतां कृत, त्रेत, द्वापार ह्यांचें युगमान होतें. १७.

युगानां सप्ततिः सैका मन्वन्तरमिहोच्यते ॥
कृताव्द संख्या तस्यान्ते सन्धिः प्रोक्तो जलप्लवः ॥ १८॥

एकाहत्तर महायुगाचें (४३२००००×७१ इतक्या वर्षांचें) एक मन्वंतर होतें. प्रत्येक युगाला जसा सन्धि तशाच प्रत्येक मन्वंतराच्या शेवटीं संधि काल असतो. कृत युगाची जितकीं वर्षे तितका (म्हणजे १७२८००० वर्षे इतका) एका मन्वंतराचा सन्धि काल असतो. त्या सन्धि कालातच जल प्रलय होतो. १८.

संधि कालाचीं वर्षे आणि मन्वन्तराचीं वर्षे मिळोन. एक मनु (अथवा ४३२००००×७१ अधिक १७२८००० इतका संधि काल म्हणजे एक मनु) असे चौदा मनु म्हणजे एक कल्प होतो.

स्पष्टीकरण—एका 'मनु' मध्यें संधिकाल धरून ३०८४४८००० इतकी वर्षे होतात.

ससन्धयस्ते मनवः कल्पे ज्ञेया श्चतुर्दश ॥
कृतप्रमाणः कल्पादौ सन्धिः पञ्चदशः स्मृतः ॥ १९ ॥

प्रत्येक कल्पारंभी कृतयुगा इतका (म्हणजे १७२८००० वर्षांचा) सन्धिकाल असतो अर्थात १४ मन्वन्तरांमध्यें पंधरा मनुसन्धिकाल असतात. १९

इत्थं युगसहस्रेण भूतसंहारकारकः ॥
कल्पो ब्राह्ममहः प्रोक्तं शर्वरी तस्य तावती ॥ २० ॥
परमायुः शतं तस्य तयाऽहोरात्र-संख्यया ॥
आयुषोऽर्द्धमितं तस्य शेषं कल्पोऽयमादिमः ॥ २१ ॥

ह्याप्रमाणें सहस्र युगांचा एक कल्प होतो. त्या कल्पानीं सर्व प्राण्यांचा संहार होतो. एक

कल्प म्हणजे ब्रह्मदेवाचा एक दिवस, तितक्याच वर्षांची त्याची रात्र. ह्याप्रमाणें ब्रह्मदेवाची ३६० अहोरात्रें झाली म्हणजे त्याचें एक वर्ष होतें. ह्याप्रमाणें शभर वर्षे ब्रह्मदेवाचें आयुष्य असतें (२×३६० कल्प × १०० इतकी वर्षे) होतात. त्यापैकीं हल्लींच्या ब्रह्मदेवाच्या आयुष्याची पन्नास वर्षे होऊन गेली आहेत एकावन्नाव्या वर्षांचा पहिला दिवस चालू आहे.

स्पष्टीकरण—एका कल्पामध्यें आपली ४३२०००००००० चार अब्ज बत्तीस कोट वर्षे होतात. पुन: तितक्याच वर्षांची रात्र. ब्रह्मदेवाचें एक अहोरात्र म्हणजे आठ अब्ज चौसष्ठ कोटि वर्षे होतात. ह्याप्रमाणें वरील प्रचण्ड सख्येला ३६०×५० ह्यानीं गुणलें म्हणजे ब्रह्मदेवाचें आयुष्य किती समाप्त झालें तें समजेल. ह्या कल्पनातीत वर्ष सख्येच्या हेतु कालाचें अनन्तत्व दाखविण्यासाठींच आहे.

कल्पादस्माच्च मनवः षड् व्यतीताः ससन्धयः ॥
वैवस्वतस्यच मनो-र्युगानां त्रिघनो गतः ॥ २२ ॥
अष्टाविंशाद्युगादस्माद्यातमेतत् कृतं युगम् ॥
अतः कालं प्रसङ्ख्याय सङ्ख्यामेकत्र पिण्डयेत् ॥ २३ ॥

दिव्य पुरुष मयासुरास म्हणतो कीं, चालू कल्पापैकीं सहा मनु होऊन गेले, [सातव्या वैवस्वत मन्वन्तराचा सन्धिकालहि खलास होऊन त्यानंतर २७ सत्तावीस महायुगें सपून गेलीं आहेत. आणि अठ्ठाविसाव्या महायुगापैकीं पहिले कृतयुगहि संपलेंच आहे तर आता ब्रह्मदेवाच्या आयुष्याचीं किती वर्षे गेलीं हें त्या करिता बेरीज गुणाकार करून तूच पहा म्हणजे झालें. २३

ग्रहर्क्ष देव दैत्यादि सृजतोऽस्य चराचरम् ॥
कृताद्रि वेदा दिव्याब्दाः शतघ्ना वेधसो गताः ॥ २४ ॥

नक्षत्रें, ग्रह, देव, दैत्य, तसेंच इतर सर्व चराचर वस्तू ह्यानीं भरलेली सृष्टि उत्पन्न होऊन किती वर्षे झालीं म्हणशील तर तिला उत्पन्न होऊन ४७४०० दिव्य वर्षे इतका काल लोटला आहे.

पश्चाद् व्रजंतोऽति जवान्नक्षत्रैः सततं ग्रहाः ॥
जीयमानास्तुलम्बन्ते तुल्यमेव स्वमार्गगाः ॥ २५ ॥

सतत म्हणजे अगदीं एक क्षणभरहि न थांबता नक्षत्रें म्हणजे स्वप्रकाश तारका ह्या अतिशय वेगानें (पूर्वे कडून) पश्चिमेकडे दोडत जात आहेत. म्हणून त्या शर्यतींत नक्षत्रांनीं ग्रहांना हटविल्यानें ते मागच्या मार्गेन राहातात. *[म्हणजे नक्षत्रें पूर्वेकडून पश्चिमेकडे धांवतात* आणि] ग्रह मागें राहिल्यानें ते नक्षत्राच्या अनुरोधानें पश्चिमेकडून पूर्वेकडे आपल्या [वास्तविक गतीनें रेंगाळत जातात. प्रत्येक ग्रहाचा नक्षत्रामधून पूर्वेकडे जाण्याचा वेग त्याच्या त्याच्या कक्षेच्या दूरत्वाच्या प्रमाणानें एकसारखा आहे. २५

स्पष्टीकरणः—हा श्लोक अतिशय महत्त्वाचा आहे. पृथ्वीचा दैनंदिन गतमुळें नक्षत्रें पूर्वेकडून पश्चिमेकडे जोरानें धांवत आहेत असें वाटतें. जोरानें म्हणण्याचें कारण असें की सर्व

नक्षत्रें आकाशाच्या परिघाची एका दिवसांतच प्रदक्षिणा संपवितात. येवढा वेग कोणाचाच नाहीं. सूर्याला सुद्धां नक्षत्रांच्या मानानें ४-मिनिटां इतका म्हणजे सुमारें दहा पळें वेळ जास्त लागतो. व्यावहारिक दृष्ट्या नक्षत्रें हीं स्थिर आहेत. परंतु वस्तुतः तीं अगदीं स्थिर नाहींत. तथापि कित्येक हजार वर्षें लोटलीं तरी त्यांच्या परस्पर सापेक्ष स्थितींत कांहींच फरक पडत नाहीं. अगदीं थोड्या तारा अशा आहेत कीं १०।१५ हजार वर्षांत त्यांच्या स्थितींत कांहीं विकलींचें अन्तर पडतें परंतु इतर नक्षत्रांत तीस तीस हजार वर्षांतहि तितकें सुद्धां अन्तर पडत नाहीं म्हणून नक्षत्रें हीं अगदीं स्थिर आहेत असेंच मानून ग्रहांच्या स्थिति गतींचें गणित वर्तवितात.

नक्षत्रें हीं **प्रवह** वायूच्या जोरानें धांवतात. असें सिद्धांतांत प्राचीन सांगितलें आहे **प्रवह** म्हणजे पृथ्वीला आपल्या आंसा भोंवती गरगर फिरविणारी शक्ति म्हणून **प्रवह** वायूच्या योगानें नक्षत्रें फिरतात. ह्याचा स्पष्ट अर्थ असा कीं पृथ्वीच्या दैनंदिन भ्रमणामुळेंच नक्षत्रांना पूर्वेकडून पश्चिमेकडे धांवण्याची गति आहे असा आपणांस भास होतो. ह्याला तुलना अशी कीं आपण आगगाडींत बसलों असतां जेव्हां गाडी भर वेगानें धांवते तेव्हां सडकेच्या कडेची झाडें, घरें व तारायंत्राचे खांब तितक्याच जोरानें उलट दिशेकडे धांवतांना दिसतात. वास्तविक पाहिलें असतां झाडें किंवा तारायंत्राचे खांब मुळींच हलत नाहींत. आगगाडीच धांवतें परंतु आपल्यास मात्र झाडें धांवत आहेत असें जें वाटतें तो अर्थातच नुसता भास असतो. त्याच प्रमाणें नक्षत्रांची भासमान गति. नक्षत्रें स्थिरच आहेत परंतु पृथ्वीबरोबर आपणहि पश्चिमेकडून पूर्वेकडे 'गिरक्या घेतो, त्या कारणानें नक्षत्रें तितक्याच वेगानें आकाशांत पूर्वेकडून पश्चिमेकडे धांवत जाऊन पृथ्वीला प्रदक्षिणा करीत आहेत असें दिसते, तो निव्वळ भास आहे हें उघड आहे- सूर्य, चंद्र आणि इतर बुधादि सप्तग्रह पश्चिमेकडून पूर्वेकडे आपल्या वास्तविक गतिनें जात असतात तरी ते देखील पृथ्वीच्या अक्षभ्रमणामुळें दररोज पृथ्वीची प्रदक्षिणा करतातच असें दिसतें—तो देखील आभासच होय.

प्रवह वायुची गति म्हणजे पृथ्वीच्या अक्षभ्रमणामुळें उत्पन्न झाल्यासारखी दिसणारी गति—हिला प्रवह—गति किंवा दैनंदिन गति असें म्हणूं. प्रवह गतिच्या शर्यतींत चंद्र हा फार मागें म्हणजे दररोज सुमारे ५० मिनिटें मागें पडतो म्हणून उशीरा उगवतो. सूर्य सुमारें चार मिनिटें ह्याप्रमाणें प्रत्येक ग्रहाचें मान निरनिराळें आहे. **परंतु प्रमाण मात्र सारखें आहे** आणि तें त्यांच्या कक्षेच्या अंतराशीं **अगदीं सारख्या प्रमाणांत आहे.** म्हणजे प्रत्येक ग्रहाचा प्रदक्षिणा काळ आणि त्याचें दूरत्व (म्हणजे सूर्यापासूनचें अन्तर) ह्यांचें **प्रमाण अगदीं सारखें** आहे. हा शोध युरोपमध्यें (Kepler) केप्लर ह्यानें लावला तोच शोध अगदीं तशाच शब्दांमध्यें आपल्या सूर्यसिद्धान्तामध्येंहि आढळत आहे. ही खरोखर भूषणास्पद गोष्ट आहे. " तुल्यमेव लम्बन्ते स्वमार्गगाः " म्हणजे आपल्या कक्षेंत फिरत असतां अगदीं सारख्या प्रमाणांतच मागें राहतात. ह्यामध्यें ओढाताण नाहीं, अध्याहार नाहीं, पदरचा शब्द नाहीं. कांहीं नाहीं. लम्बन्ते म्हणजे रेंगाळत पूर्वेकडे जातात. त्यांत शनि हा फारच रेंगाळतो—तो अगदीं मन्द आहे. त्यापेक्षां गुरु जरा लौकर भ्रमण करतो, त्यापेक्षां मंगळ नंतर रवि त्यापेक्षां शुक्र. त्याहिपेक्षां बुध. नंतर चंद्र. चंद्र हा सर्वांमध्यें नक्षत्र प्रदक्षिणा लौकर पुरी करतो.

प्राग्गतित्वं अत स्तेषां भगणैः प्रत्यहंगतिः ॥
परिणाहवशाद् भिन्ना तद्वशाद्भानि भुञ्जते ॥ २६ ॥
शीघ्रग स्तान्यथाल्पेन कालेन महताऽल्पगः ॥
तेषां तु परिवर्त्तेन पौष्णान्ते भगणः स्मृतः ॥ २७ ॥

भगण (म्हणजे **स्थिर नक्षत्रांचा समूह;** व विशेषें करून कृत्तिकादि सत्तावीस नक्षत्रें किंवा मेषादि तारा-युक्त बारा **विभाग** ह्यांना " भगण " ही संज्ञा आहे. असा भगण) अथवा नक्षत्रांचें चक्र हें दररोज पूर्वेकडून पश्चिमेकडे आकाश परिघांतून वेगानें प्रदक्षिणा करीत असल्यामुळें रविचंद्रादि ग्रह हे प्रतिदिनीं नक्षत्रातून **पूर्वेकडे** गमन करितात. प्रत्येक ग्रहाच्या कक्षेचा परिघ म्हणजे घेर निरनिराळा असल्या कारणानें त्यांची पूर्वेकडे जाण्याची दिनगति निरनिराळ्या मानांची असते. अशा भिन्न गतीनें ते सर्व नक्षत्रातून (पश्चिमेकडून पूर्वेकडे) यथा काल भ्रमण करितात (हाच ग्रहांचा नक्षत्र भोग.) २६

म्हणूनच ज्या ग्रहाची दिनगति जलद असते तो ज्या अवधींमध्यें सर्व नक्षत्र चक्राचा भोग करितो. त्या पेक्षा जास्त वेळ त्या पेक्षां कमी गतीच्या ग्रहास लागतो. [ज्या ग्रहाची दिनगति कमी त्यांच्या भगणास वेळ जास्त; किंवा ज्याच्या भगणास वेळ कमी त्या ग्रहाची दिनंगति जास्त] त्यांचा सत्तावीस नक्षत्रातून एक फेरा पुरा झाला म्हणजे त्यास "भगण" म्हणतात. सर्व ग्रहांचा भगण **रेवती** नक्षत्राच्या अखेरीस पूर्ण होतो. २७

स्पष्टीकरणः—" भगण " ह्या संज्ञेचा पारिभाषिक अर्थ " नक्षत्रचक्रामधील ग्रहाचें परिभ्रमण किंवा फेरा " असा श्लोक २६, २७ ह्यांच्या अनुरोधानें होतो.

विकलानां कला षष्ट्या तत्षष्ट्या भाग उच्यते ॥
तत् त्रिंशता भवेद्राशि-र्भगणो द्वादशैव ते ॥ २८ ॥

सबध नक्षत्र चक्राचा जो परिघ त्याचे बरोबर सारखे बारा भाग केले म्हणजे प्रत्येक भागाला राशि असें म्हणतात. बारा राशिचा एक नक्षत्र—भगण [ह्याचा अन्तिम विन्दु श्लोक २७ प्रमाणें रेवती नक्षत्राचा शेवटचा बिन्दु होय. तोच भगणाचा शेवट आणि तेथूनच भगणाचा आरंभ तो सूर्यसिद्धान्ताप्रमाणें अश्विन्यादि, आणि वेदाङ्ग ज्योतिषानुसार कृत्तिकादि असतो.] राशिचा तिसावा भाग तो अंश (किंवा राश्यंश. अर्थात् एका भगणांत ३६० अंश असतात. अंशाचा साठावा विभाग म्हणजे कला, आणि एका कलेचा साठावा विभाग म्हणजे विकला.

स्पष्टीकरणः—अंशाच्या आंकड्याच्या डोक्यावर ० पोकळ शून्याची खूण करतात. कलेची खूण ′ अशी, आणि विकलेची खूण ″ अशी असते. मूळ ग्रंथांत ६०″ ची एक कला ६०′ कलांचा एक अंश, ३०° अंशाचा राशि आणि बारा राशींचा भगण असें कोष्टक सांगितलें आहे. परंतु परिघ हें परिमाण निश्चित, कोणत्याहि परिघाचा तीनशें साठावा हिस्सा म्हणजे एक अंश हेंहि निश्चित असल्यानें भाषान्तरामध्यें परिघापासून विकले पर्यंत उतरत्या भाजणीनें कोष्टक दिलें आहे.

युगे सूर्य–ज्ञ–शुक्राणां खचतुष्क–रदार्णवाः ॥
'कुजार्कि–गुरु–शीघ्राणां भगणाः पूर्वयायिनाम् ॥ २९ ॥

सूर्य, बुध, शुक्र, मंगळ, गुरु आणि शनि ह्यांची मध्यम गति समजण्यासाठीं, आणि पूर्वकडे (नक्षत्रातून) गमन करणाऱ्या ग्रहांचीं शीघ्रें समजण्यासाठीं ४३२०००० त्रेचाळीस लक्ष वीस हजार सौर वर्षांचें जें महायुग त्याच्या अनुरोधानें भगणसंख्या ठरविली आहे (म्हणून एका महायुगामध्यें सूर्याचे भगण ४३२०००० इतके होतात) २९

इन्दो रसाग्नित्रित्रीषु–सप्तभूधरमार्गणाः ॥
दस्रत्र्यष्ट रसाङ्काक्षिलोचनानि कुजस्य तु ॥ ३० ॥
बुध शीघ्रस्य शून्यर्तुखादित्र्यंक नगेन्दवः ॥
बृहस्पतेः खदस्राक्षि वेदषड्वह्नय–स्तथा ॥ ३१ ॥
सितशीघ्रस्य षट्सप्तत्रियमा श्विखभूधराः ॥
शनेर्भुजङ्ग षट्पञ्च रस वेद निशाकराः ॥ ३२ ॥
चन्द्रोच्चस्याग्निशून्याश्वि वसु सर्पार्णवा युगे ॥
वामं पातस्य वस्वग्नियमाश्विशिखिदस्रकाः ॥ ३३ ॥

तसेंच एका महायुगात चंद्राचे ५७७५३३३६, मंगळाचे २२९६८३२, बुध शीघ्राचे १७९३७०६०, गुरुचे भगण ३६४२२०, शुक्र शीघ्राचे ७०२२३७६, आणि शनिचे १४६५६८ भगण होतात चंद्रोच्चाचे ४८८२०३, चंद्रपाताचे म्हणजे राहूचे भगण २३२२३८ होतात पातक किंवा राहू ह्याची गति उलट असते

भानामष्टाक्षि वस्वद्रि त्रि द्वि द्वयष्ट शरेन्दवः ॥
भोदया भगणैः स्वैः स्वैरूना स्वस्वोदया युगे ॥ ३४ ॥

नक्षत्रांचे फेरे एका महायुगांत १५८२२३७८२८ होतात हे फेरे म्हणजे नाक्षत्र-दिनांची संख्या होय ह्या नाक्षत्र भगणा या दिन संख्येतून प्रत्येक ग्रहाची भगण संख्या वजा केली असता वरील नक्षत्र दिनसंख्येच्या अनुरोधानें त्या त्या ग्रहाचें उदय किती होतात ती संख्या समजते

उदाहरणार्थ नाक्षत्रदिन संख्या १५८२२३७८२८ उणे ४३२०००० = १५७७९१७८२८ ही सूर्योदयाची संख्या झाली एक सूर्योदय म्हणजे सावन दिवस म्हणून एका महायुगाच्या काळखण्डांत १५७७९१७८२८ इतके सावन दिवस होतात ते हा त्रैराशिकानें सावनदिन संख्येला सौर भगण संख्येनें भागिलें असता एका सौर वर्षाचें सावन मान समजतें ते ३६५ दिवस १५ घ ३१ पळे ३१ विपळें येतें

भवन्ति शशिनो मासाः सूर्येन्दु भगणान्तरम् ॥
रविमासोनितास्तेतु शेषाः स्युरधिमासकाः ॥ ३५ ॥

एका महायुगाच्या चन्द्र भगणांतून सूर्याचे भगण वजा केले असतां एका महायुगांतील चान्द्रमासांची संख्या समजते. त्यांतून रविमासांची संख्या (४३२००००×१२) वजा केली असतां महायुगांतील अधिक चान्द्रमासांची संख्या येतें. ३५

सावनाहानि चान्द्रेभ्यो द्युभ्यः प्रोज्झ्य तिथि क्षयाः ॥
उदया दुदयं भानो र्भूमिसावनवासराः ॥ ३६ ॥

चान्द्रमासांच्या तिथि करून (म्हणजे चान्द्रमास संख्येला ३० नीं गुणून) त्यातून सावन दिनसंख्या वजा केली म्हणजे क्षय तिथींची संख्या येते. सूर्याचा उदय झाल्यापासून पुढील दुसरा उदय होई पर्यंतचा जो काळ तो भौम दिन होय, ह्यालाच सावन दिवस म्हणतात. ३६

वसु-द्वयष्टाद्रिरूपाङ्कसप्ताद्रि-तिथयो युगे ॥
चान्द्राःखाष्ट खखव्योमखाग्निखर्तुनिशाकराः ॥ ३७ ॥

एका महायुगांत मध्यम मानाचे सावन दिवस (श्लोक ३४ प्रमाणें) १५७७९१७८२८ इतके असतात आणि चान्द्रदिन अथवा तिथींची संख्या १६०३०००००८० इतकी असते. ३७

षड्-वह्नि-त्रि-हुताशाङ्क-तिथयश्चाधिमासकाः ॥
तिथिक्षया यमार्थाश्विद्वयष्टव्योमशराश्विनः ॥ ३८ ॥

(श्लोक ३५ प्रमाणें) एका महायुगांत १५९३३३६ अधिकमास (चान्द्र-सौर मानानें) येतात आणि २५०८२२५२ क्षयतिथिंची संख्या असते. ३८

खचतुष्कसमुद्राष्ट-कुपञ्च-रविमासकाः ॥
भवन्ति भोदया भानुभगणैरूनिताः कुद्याः ॥ ३९ ॥

महायुगांतील सौरवर्ष संख्या ४३२०००० हिला १२ नीं गुणिलें असतां ५१८४००००० इतकी सौरमासांची संख्या होते आणि वर श्लोक ३४ व ३७ ह्यांत सांगितल्याप्रमाणें नक्षत्रभ्रमण संख्या (१५८२२३७८२८) ह्यांतून सौर भगण (४३२००००) उणे केल्यास कुदिन संख्या म्हणजे सावन दिन संख्या येतें. ३९

अधिमासोनरात्र्यृक्ष चांद्र सावन वासराः ॥
एते सहस्रगुणिताः कल्पेस्युर्भगणादयः ॥ ४० ॥

एका महायुगामध्यें होणारे अधिमास, क्षयतिथी, चान्द्र सावन दिन इत्यादिकांस १००० ह्या संख्येनें गुणिले असतां त्यांची एका कल्पातील संख्या येतें.

वरील श्लोक २९ पासून ३६ पर्यंत एका महायुगांत जी मानें निघतात ती येणें प्रमाणें—
सृष्टयुत्पत्तिकाळें वर्षे १७०६४०००० (श्लोक २४)
एक महायुग ४३२०००० वर्षें

नक्षत्र भ्रम अथवा भूभ्रम	१५८२२३७८२८		ग्रहांचे भगण
		बुध	१७९३७०६०
रवि भगण	४३२००००	शुक्र	७०२२३७६
सावनदिन	१५७७९१७८२८	मंगळ	२२९६८३२
चन्द्रभगण	५७७५३३३६	गुरु	३६४२२०
चन्द्रोच्च	४८८२०३	शनि	१४६५६८
चन्द्रकेन्द्र	५७२६५१३३	चांद्रमास	५३४३३३३६
चंद्रपात अथवा राहु	२३२२३८	तिथि	१६०३०००८०
		अधिकमास	१५९३३३६
सौरमास	५१८४००००	क्षयतिथि	२५०८२२५२

श्लोक ४१ ते ४४ ह्यांत रवि, मंगळ, बुध, गुरु, शुक्र, शनि ह्यांच्या मन्दोच्चांचे एक कल्पांतील भगण आणि पात भगण दिले आहेत ते असेः—

प्राग्गतेः सूर्यमन्दस्य कल्पे सप्ताष्टवह्नयः ॥
कौजस्य–वेद–खयमा बौधस्याष्टर्तु वह्नयः ॥ ४१ ॥
खखरंध्राणि जैवस्य शौक्रस्यार्थ–गुणेषवः ॥
गोऽग्नयः शनिमन्दस्य, पातानामथ वामतः ॥ ४२ ॥
मनुदस्रास्तु कौजस्य बौधस्याष्टाष्ट–सागराः ॥
कृताद्रिचन्द्रा जैवस्य त्रिखाङ्काश्च भृगोस्तथा ॥ ४३ ॥
शनिपातस्य भगणाः कल्पे यमरसर्तवः ॥
भगणाः पूर्वमेवात्र प्रोक्ताश्चन्द्रोच्चपातयोः ॥ ४४ ॥

एका कल्पामध्यें (१००० महायुगांत)

मन्दोच्च भगण		पातभगण	
रवि	३८७	—नाहीं—	
मगळ	२०४	मंगळ	२१४
बुध	३६८	बुध	४८८
गुरु	९००	गुरु	१७४
शुक्र	५३५	शुक्र	९०३
शनि	३९	शनि	६०

आतां कल्पारंभापासून व सृष्टयुत्पत्तिपूर्ण झाल्या पासून इष्टवर्षापर्यंत गतवर्ष संख्या कशी काढावी त्याचे विवेचन ४५, ४६, ४७ ह्या श्लोकांत केलें आहे.

षण्मनूनां तु सम्पिण्डय कालं तत्सन्धिभिः सह ॥
कल्पादिसन्धिना सार्धं वैवस्वतमनो स्तथा ॥ ४५ ॥

युगानां त्रिधनं यातं तथा कृतयुगं त्विदम् ॥
प्रोज्झ्य सृष्टे स्ततः कालं पूर्वोक्तं दिव्यसंख्यया ॥ ४६ ॥

सूर्याब्द-सङ्ख्यया ज्ञेया कृतस्यान्ते गता अमी ॥
खचतुष्क-यमाद्रयग्नि-शररन्ध्र-निशाकराः ॥ ४७ ॥

प्रत्येक मन्वन्तराच्या वर्ष संख्येंत त्याचा सन्धिकाल (जो कृतयुगा येवढा असतो तो) मिळवून संधियुक्त मन्वन्तरांची संख्या (अ ही) काढावी नंतर सहा मन्वन्तरें पूर्ण झालीं म्हणून वरील (अ) संख्येची सहा पट करावी (म्हणजे आ ही संख्या सहा मन्वंतरांची होईल. ह्यात कल्पारंभाचा संधिकाल मिळवावा. (म्हणजे क सख्या येते.) नंतर २७ महायुगें गत झाली त्यांची संख्या मिळवून (ख हीं) संख्या आणावी. नंतर त्यात अठ्ठाविसाव्या महायुगापैकीं कृतयुग पूर्ण झालें असल्यानें त्याचीं वर्षें मिळवून जी (ग ही) वर्ष संख्या येते ती कल्पारभापासून सातव्या मन्वंतराच्या अठ्ठाविसाव्या महायुगापैकीं कृतयुगाच्या अखेरीपर्यंतचीं वर्षसंख्या होईल. नंतर त्यांतून सृष्टयुत्पत्तिकडे लागलेलीं (४७४०० × ३६०) वर्षे वजा केल्यास सृष्टयुत्पत्तिपूर्ण झाल्यापासून चालू मन्वन्तराच्या अठ्ठाविसाव्या चौकडीचें पहिलें (कृत) युग समाप्त झालें तों पर्यंतची गतवर्ष संख्या येते, ती १ अब्ज, ९५ कोटी, ३७ लक्ष, आणि २० हजार इतकी आहे.

स्पष्टीकरणः—महायुगाची वर्ष संख्या श्लोक १५ प्रमाणें ४३२०००० येते. त्याला ७१ नीं *गुणून मन्वंतर वर्षसंख्या श्लोक १८ प्रमाणें* [३०६७२००००] + सन्धिकाल कृत-युगा येवढा १७२८००० वर्षे = (अ) सन्धियुक्त मन्वन्तर वर्ष संख्या [३०८४४८०००], याप्रमाणें सहा ससन्धि मन्वन्तराची वर्षसंख्या. (आ) [१८५०६८८०००] + [कल्पारंभसन्धि १७२८०००. मिळोन कल्पारंभापासून सहा मन्वन्तरें पूर्ण (क) [१८५२४१६०००] वर्षं संख्या; ह्यांत २७ महायुगाचीं वर्षे ११६६४०००० (ख) मिळवून अठ्ठाविसाव्या महायुगा-पैकीं कृतयुग पूर्ण झालें म्हणून त्यांची वर्षे मिळविली तेव्हां (ग) कल्पारंभापासूनची वर्षसंख्या १९७०७८४००० होतें. त्यातून सृष्टयुत्पत्तिची वर्षें (१७०६४०००) वजा केली म्हणजे प्रस्तुत कल्पांतील सृष्टयुत्पत्तिपासून चालू महायुगांतील कृतयुगांच्या अखेरीपर्यंतचीं वर्षें येतील तीं १९५३७२०००० होतात. त्यांत त्रैतायुगाचीं (१२९६०००) आणि द्वापराचीं (८६४०००) वर्षें मिळविलीं म्हणजे १९५५८८०००० इतकी कलियुगारंभापर्यंतचीं वर्षें येतात. त्यांत ३१७९ वर्षें आणखी मिळविल्यास शालिवाहन शकारंभापर्यंतची वर्षसंख्या येते.

अत ऊर्ध्वम् अमी युक्ता गतकालाब्दसङ्ख्यया ॥
मासीकृता युता मासै र्मधुशुक्लादिभि र्गतैः ॥ ४८ ॥

पृथक्स्थास्तेऽधिमासघ्नाः सूर्यमास-विभाजिताः ॥
लब्धाधिमासकैर्युक्ता दिनीकृत्य दिनान्विताः ॥ ४९ ॥

द्विष्ठास्तिथिक्षयाभ्यस्ता-श्चान्द्रवासरभाजिताः ॥
लब्धोनरात्रिरहिता लङ्कायामार्धरात्रिकः ॥ ५० ॥

सावनो द्युगणः सूर्यात् दिनमासाब्दपास्ततः ॥
सप्तभिः क्षयितः शेषः सूर्याद् यो वासरेश्वरः ॥ ५१ ॥

ह्यानंतर अहर्गण आणण्याची पद्धति सांगतातः—

आतांपर्यंतसृष्ट्युत्पत्तिपासून गेल्या कृतयुगाच्या अंतांपर्यंत गत झालेली वर्षसंख्या १ अब्ज, ९५ कोटि, ३७ लक्ष, आणि वीसहजार कशी होते तें सांगितलें, परंतु अहर्गण काढण्यास चालू वर्षाच्या अगोदरच्या वर्षाच्या अखेरीपर्यंतची वर्षसंख्या प्रथम काढली पाहिजे. त्यासाठीं कृतयुगांतींच्या वर्षसंख्येंत त्रेतायुग द्वापरयुग आणि गतकलियुग इतकीं वर्षे मिळविलीं पाहिजेत हीच गोष्ट प्रथम वरील श्लोकांत सांगितली आहे. ती अतःऊर्ध्वम् ह्या श्लोकापासून सांगतातः—

त्रेतारंभापासून ही कृतयुगांतीची संख्या अगदीं चालू वर्षापर्यंतच्या वर्षसंख्येंत मिळवावी.नंतर त्या संख्येस १२नी गुणिलें असतां महिन्यांची संख्या निघते; (अ) त्यांत चैत्रादि गतमाससंख्या मिळवावी (आ) त्यांत गतअधिकमास मिळविले म्हणजे चांद्र मास होतात. (क) अधिकमास संख्या काढण्यासाठीं एकंदर माससंख्येस महायुगान्तर्गत अधिमाससंख्येनें गुणून सौरमास संख्येनें भागावें लागतें; ह्या प्रमाणें आलेले अधिमास मास संख्येंत मिळवून त्यांच्या तिथि कराव्या आणि त्यांत गततिथि मासारंभापासून मिळवून त्या संख्येतून क्षयतिथि वजा केल्यास **सावनदिनसंख्या** येते. (ख) हाच द्युगण, किंवा दिनराशि, अथवा अहर्गण होय. (महायुगांतर्गत क्षयतिथि संख्येनें चांद्रदिनांस गुणून युगांतील तिथिसंख्येनें भागिलें असतां क्षयतिथि येतात त्या वजा कराव्या) ह्या अहर्गण लंकेतील मध्यरात्रीचा येतो. अहर्गणास सातांनी भागून बाकी राहील ती रविवारापासून मोजल्यास अद्रप म्हणजे मेष संक्रमणाचा वार निघतो ह्यालाच वासरेश्वर म्हणतात.

स्पष्टीकरणः—ह्या अहर्गण कांहीं विशिष्ट वर्षांच्या आरंभीचा एकदमच करून त्या दिवशीच्या संक्रमणाच्या वेळेचे मध्यम ग्रहहीं काढून ठेवतात. त्यांस त्या त्या ग्रहाचे क्षेपक म्हणतात. हीं विशिष्ट वर्षे म्हणजे द्वापर युगाच्या अन्तिम वर्षांतील मेषसंक्रमणकाल; नंतर कलियुगाच्या ३१७९ ह्या वर्षाचें मेषसंक्रमण. हेंच शून्यशकींचें मेषसंक्रमण, त्यानंतर आर्यभट, वराहमिहिर, शून्यायनांशवर्ष, ब्रह्मगुप्त भास्कराचार्य, गणेशदैवज्ञ ह्यांच्या सिद्धांतांचीं वर्षे ह्या सर्व वर्षांचें अहर्गण आणि क्षेपक पडताळा पाहण्यास उपयोगी पडतात.

ह्या संबंधानें ज्यो. दीक्षित लिहितातः—

" सांप्रतचा सूर्यसिद्धांत आणि त्याचे अनुयायी इतर सिद्धांत यांच्या मतें कल्पारंभींच सर्व सृष्टि उत्पन्न झाली नाहीं, तर सृष्टि उत्पन्न करण्यास ब्रह्मदेवास ४७४०० दिव्यवर्षे म्हणजे कलियुगायेवढीं ३९॥ युगें लागलीं. कल्पारंभापासून इतका काळ गेला तेव्हां सर्व ग्रह, त्यांचीं उच्चें आणि पात हे सर्व एकत्र होते. पुढें ग्रहगति सुरु झाली. दुसऱ्या आर्यभटाचें बहुतेक असेंच मत आहे. त्याचीं सृष्ट्युत्पत्ति वर्षसंख्या मात्र भिन्न आहे. पंचसिद्धान्तिकोक्त सूर्यादि सिद्धांतांचें मत काय होतें हे समजण्यास मार्ग नाहीं.

सांप्रतच्या सूर्यसिद्धान्ताप्रमाणें वर्तमान कलियुगारंभीं सर्व ग्रह मध्यम मानानें एकत्र येतात. तसेंच कृतयुगांतीं सूर्यसिद्धांत झाला तेव्हांहि सर्व ग्रह एकत्र होते. महायुगांत ग्रहांचे जे भगण

मानले आहेत. त्यांची संख्या चोहोंनी विभाज्य आहे. यामुळें २॥ कलियुगांत पूर्ण होतो. यामुळें २॥ कलियुगांइतक्या कालाचें अन्तरानें सर्व ग्रह पुनः एकत्र येतात. ब्रह्मदिनापासून वर्तमान कलियुगारंभापर्यंत ४५६७ इतकीं कलिप्रमाण वर्षे गेलीं. ही संख्या २॥ यांनीं विभाज्य नाहीं. यामुळें सृष्ट्युत्पत्तिकडे कांहीं वर्षे गेलीं नाहींत असें मानलें तर कल्पारंभीं सर्व ग्रह एकत्र येत नाहींत. कलिप्रमाण ३९॥ युगें सृष्ट्युत्पत्तिकडे गेल्यामुळें ग्रहप्रचारारंभापासून वर्तमान कलियुगारंभापर्यंत (४५६७–३९॥) ४५२७॥ कलिप्रमाण युगें होतात, ही संख्या २॥ यांनीं विभाज्य आहे. यामुळें सृष्ट्यारंभी सर्व ग्रह एकत्र होते असें मानून वर्तमान कलियुगारंभी आणि तत्पूर्वकृतान्ती ते एकत्र येतात.

सृष्ट्यारंभीं मात्र उचें आणि पात एकत्र होते बाकी कोणत्याहि काली ते सर्व एकत्र येत नाहींत.

युगपद्धतिचें महत्त्व काय आणि आपल्या धर्मशास्त्रात व पुराणांत तिचा अन्तर्भाव कशाकरितां झाला ह्याचें विवेचन येथें अप्रस्तुत आहे. कालाचें अनंतत्व आणि कालात्मा जो परमेश्वर त्याच्या स्वरूपाचें अंशतः तरी दिग्दर्शन कालाचा अनन्तत्वाच्या जाणिवेमुळें निश्चितपणें होतें. आणि ज्योतिष तर प्रत्यक्ष कालाशीं संलग्न असलेलीं जीं ग्रहनक्षत्रें त्यांच्याशींच एकतान असल्यामुळें युग पद्धतीचें महत्त्व ज्योतिषांत तर अपरिमितच आहे. अगदीं स्थूल दृष्टीनें पाहिलें तरी वर्षमान, चन्द्र आणि इतर ग्रह ह्यांचे भ्रमणकाल, त्याचप्रमाणें अतिशय सूक्ष्म गतिनें सरकणारी मन्दोचें, व पात ह्यांचें मापन युगपद्धतीशीं जोडून दिल्यानें जसें सूक्ष्म आणि निश्चित सांगतां येतें तसें तें इतर पद्धतिनें तितक्या सूक्ष्मपणें व्यवस्थित सांगतां आलें नसतें. आणि त्याचा सूक्ष्म पद्धतिनें उपयोगहि करितां आला नसता. सूर्यसिद्धान्तातील उचातुर्यानीं वर्षमान जसें युगपद्धतीशीं जोडून देतां येतें तसें नवीन वर्षमानहि युगपद्धतिशीं जोडून देतां येणें शक्य आहे. परंतु त्याच्या उहापोहाची जरूरी नाहीं.

मासाब्ददिन सङ्ख्याप्तं द्वित्रिघ्नं रूपसंयुतम् ॥
सप्तोद्धृतावशेषौ तु विज्ञेयौ मासवर्षपौ ॥ ५२ ॥

[अहर्गण झालाच गुणण किंवा दिनराशि म्हणतात. आणि ज्याची रीति मागील श्लोकांत सांगितली त्या] अहर्गणाला तिसानीं भागून त्या भागाकाराला दोहोंनीं गुणून त्यांत एक मिळवावा. आणि त्या संख्येला सातानीं भागून जी बाकी राहील त्या आंकड्यापर्यंत रविवार पासून मोजावें. आणि तो वार मासाधिपति आहे असें समजावें.

त्याच प्रमाणें अहर्गणाला ३६० नीं भागून भागाकाराला तिहीनीं गुणून त्यांतहि एक मिळवावा, आणि त्या संख्येस ७ नी भागून जी बाकी उरेल त्या आंकड्यापर्यंत रविवार १ असें समजून मोजावें म्हणजे संवत्सराधिपति येतो.

यथा स्वभगणाभ्यस्तो दिनराशिः कुवासरैः ॥
विभाजितो मध्यगत्या भगणादि ग्रहोभवेत् ॥ ५३ ॥

नंतर ग्रहांच्या भगण संख्येपासून त्यांचे राश्यंशादिक मध्यममानानें आणावें. ह्यालाच मध्यम ग्रह म्हणतात. अहर्गणाला त्या त्या ग्रहांच्या (महायुगांतील) भगणसंख्येनें गुणावें आणि सावनदिन संख्येनें (अथवा कुदिन संख्येने भागावें (भागाकाराची संख्या सोडून द्यावी कारण ते पूर्ण भगण असतात.) बाकी राहील तिला १२ नीं गुणून पुन: सौरदिनसंख्येनें भागावें म्हणजे मध्यम ग्रहाच्या स्थानाच्या राशीच्या आंकडा येतो. नंतर पुनः बाकी राहिल्यास ३०नें गुणून अंश कला, विकला याप्रमाणें मध्यम ग्रह आणावा.

स्पष्टीकरण:—५३ व्या श्लोकांतील पद्धति केवळ त्रैराशिक आहे. भगण म्हणजे १२ राशींचे पूर्ण चक्र. अशीं चक्रें प्रत्येक ग्रहाचीं एका महायुगांत जितकीं होतात तितक्या संख्येला भगण (संख्या) ह्मणतात. महायुगांत (१५७७९१७८२८) इतकी कुदिनांची संख्या असते. ह्मणून त्रैराशिक मांडलें पाहिजे तें असें:—

इतक्या कुदिनांमध्यें, जर इतके भगण, तर इतक्या अहर्गणामध्यें किती भगण. त्यामुळें— अहर्गण × भगण ÷ भागिले कुदिन = मध्यम ग्रह—अशी रीति बसली.

एवं स्वशीघ्रमन्दोच्चा ये प्रोक्ताः पूर्वयायिनः ॥
विलोमगतयः पाताः तद्वत् चक्राद् विशोधिताः ॥ ५४ ॥

ह्याचप्रमाणें ग्रहांचीं मन्दोच्चें, शीघ्रोच्चें व पात ह्यांचें एका कल्पांतील भगण मागें* श्लोक ४१ ते ४४ मध्यें सांगितले आहेतच. त्यावरून मन्दोच्चें व पात त्रैराशिक पद्धतीनें काढावें, मात्र पातांचे जे राश्यादिक येतील ते उलट गतिचे (विलोम गतिचे) असल्या कारणानें त्यांचे राश्यं-शादिक चक्रशुद्ध करून घेतले पाहिजेत.

स्पष्टीकरण:— चक्रशोधन करणें म्हणजे राश्यंशादिक १२ राशितून वजा करणें. महा—युगांतील कुदिनांची एक हजार पट केली असतां कल्प कुदिन निघतील. त्यावेळि वरील प्रमाणें च त्रैराशिक मांडावें.

द्वादशघ्ना गुरोर्याता भगणा वर्तमानकैः ॥
राशिभिः सहिताः शुद्धाः षष्ट्यास्युर्विजयादयः ॥ ५५ ॥

बार्हस्पत्य संवत्सर " विजय, जय मन्मथ " इत्यादि गुरुच्या भगणांस बारांनीं गुणून त्यांत गुरु ज्या राशित असेल तेथपर्यंतची राशिसंख्या म्हणजे गतराशिसंख्या मिळवावी. एकंदर संख्येला ६० नीं भागावें जो भागाकार येईल तो आंकडा " विजयादि " असतो त्रैराशिक गुरुभगण×१२ +गतराशि ÷ ६० = विजयादि.

विस्तरेणैत—दुदितं सङ्क्षेपाद्व्यावहारिकम् ॥
मध्यमानयनं कार्यं ग्रहाणामिष्टतो युगात् ॥ ५६ ॥
अस्मिन् कृतयुगस्यान्ते सर्वे मध्यगता ग्रहाः ॥
विना तु पात—मन्दोच्चान् मेषादौ तुल्यतामिताः ॥ ५७ ॥

वरच्या सर्व श्लोकांतील गणितकार्य त्यांत मोठमोठ्या संख्यांचे गुणाकार भागाकार अस-

त्यानें फार त्रासदायक आहे. तथापि तें युक्तिनें शक्य तितकें बेतांन आणतां येतें. त्या प्रमाणें इष्टयुगापर्यंत क्षेपकादि करून वरील लांबलचक गणिताचा संक्षेप करतां येतो.

मन्दोच्चें आणि पात हे फक्त कल्पारंभीच मेषादि होते त्यानंतर ते एकत्र येत नाहींत. परंतु मध्यमग्रह मात्र महायुगाच्या चौकडींतील कृतयुगाच्या शेवटच्या वर्षाच्या अखेरीस भगणपूर्ण होऊन सर्व ग्रह मेषराशीच्या अगदी आरंभी होते. म्हणजे प्रत्येक ग्रहाचा मध्यम भोग शून्य होता.

मकरादौ शशाङ्कोच्चं तत्पातस्तु तुलादिगः ॥
निरंशत्वं गता–श्चान्ये नोक्ता–स्ते मन्दचारिणः ॥ ५८ ॥

चद्राचें मन्दोच्च मकरारंभीं, आणि राहु तुलारंभीं होता. बाकीच्या ग्रहांची मन्दोच्चें पात हे कृतयुगांतीं शून्य नसल्यानें येथें सांगितले नाहींत.

*कल्पस्यात्र सहस्रांशो युगं तावत्प्रकीर्त्यते ॥
चतुर्विंशो युगस्यांशः सूर्याचन्द्रमसोर्युगम् ॥ १ ॥
एकैकमष्टादशभिः सूर्याद्यैरयुताहतैः ॥
तत्रार्केन्द्वधिमासार्किशुक्रेन्द्वन्हां निरंशता ॥ २ ॥
चन्द्रस्याङ्काष्टवन्ध्यङ्कखजिना भगणाः स्मृताः ॥
सौरमासास्तर्कभूमियमश्चैवायुताहताः ॥ ३ ॥
अधिमासा नवाष्टाग्निरसषट्कास्तिथिक्षयाः ॥
षडंशोनाः समुद्राङ्क शून्यार्थ कृत खेन्दवः ॥ ४ ॥
रसाद्रिशरतर्काब्धिनगपञ्चरसास्त्विह ॥
सषष्ठंशाः कुदिवसा नलिनीरिपुवासराः ॥ ५ ॥
खाद्रितर्केन्दुनन्दाद्रि रसतर्काःस्मृतास्तथा ॥
कुजस्य भगणा राशिचतुष्कसहिता अमी ॥ ६ ॥
चन्द्रखाद्रीषु नन्दाः स्युरद्रिन्खेदुरसाः शने ॥
ज्ञशीघ्रस्य नगाग्न्यग्निसप्तवेदनगास्तथा ॥ ७ ॥
भगणास्ते सषड्भाःस्युर्भगणाः स्युरमी गुरोः ॥
साशभानि शराद्रीन्दु वियद्यो भगणा अमी ॥ ८ ॥
नवगोतत्वरन्ध्राक्षिरूप्या दैत्यगुरोस्तथा ॥
शीघ्रोच्च भगणाज्ञेयास्तदा मन्दोच्चके विधोः ॥ ९ ॥
सार्द्धराशिर्यमाब्ध्यग्निनखाः पातस्य सास्रतः ॥
रसाद्रिरसनन्दाः स्युः सूर्याचन्द्रमसोर्युगे ॥ १० ॥

---

*सूचनाः— वर दिलेले १० श्लोक सूर्यसिद्धांताच्या मूळ प्रतींत व रंगनाथी टीकेंत नाहींत. दुसऱ्या कांहीं प्रतींत आहेत, पण त्याचा मूळ विषयाशी तसा संबंध दिसत नाहीं. म्हणून त्याचें भाषांतर दिलें नाहीं.

कृतयुगाच्या अन्तीं मन्दोच्चें व पात

मंदोच्च					पात				
रवि	०	७	२८	१२					
बुध	५	४	४	४८	बुध	८	११	१६	४८
शुक्र	११	१३	२१	—	शुक्र	२	१७	२८	४८
भौम	३	३	१४	२४	भौम	९	११	२०	१२
गुरु	०	९	०	०	गुरु	८	८	५६	२४
शनि	४	२०	१३	१२	शनि	४	२०	१३	१२

हे अंक क्षेपक म्हणून समजावे.

आतां देशान्तर (रेखान्तर) संस्कारासाठी भूत्रिज्या, (व्यासार्ध) आणि परिधि सांगतात.

योजनानि शतान्यष्टौ भूकर्णो द्विगुणानि तु ॥
तद्वर्गतो दशगुणात् पदं भूपरिधिर्भवेत् ॥ ५९ ॥

भूकर्ण म्हणजे भूत्रिज्या, हिच्या दुप्पटीचा वर्ग करून त्याला दहानीं गुणावें आणि गुणाकाराचें वर्गमूळ काढावें म्हणजे भूपरिधि येईल.

पृथ्वीची त्रिज्या सिद्धान्त कारानीं ८०० योजनें मानली आहे. अर्थात् व्यास १६०० योजनें ठरला म्हणून (२ × ८००) वर्ग × १० = २५६००००० ह्याचें वर्गमूळ काढलें असतां भूपरिधि सुमारें ५०१० योजनें येतो.

[एका योजनाचे ५ मैल धरले तर भूपरिधि २५००० मैल होतो.]

स्पष्टीकरणः—त्रिज्येची दुप्पट म्हणजेच व्यास; व्यासाच्या वर्गास दहानीं गुणून त्याचें वर्गमूळ काढण्यास सांगितलें आहे. परंतु हेंच प्रमाण निराळ्या रीतीनें मांडता येतेः—

$\sqrt{\text{व्यास वर्ग} \times १०}$ = व्यास × $\sqrt{१०}$; १० चें वर्गमूळ ३·१४१६ ह्यांच्या जवळ जवळ येते. म्हणजे इंग्रजी भाषेंत ज्याला **" पाय "**———— म्हणतात तो गुणक $\sqrt{१०}$ दहाचें हा वर्गमूळ होय. व्यासाला ३·१४१६ ह्यांनीं गुणिलें असतां त्या व्यासाचा परिधि यतो हे प्रसिद्धच आहे आणि तोच अर्थ सिद्धान्तकारांचाहि आहे.

लम्बज्याघ्नस् त्रिजीवाप्तः स्फुटो भूपरिधिः स्वकः ॥
तेन देशान्तराभ्यस्ता ग्रहभुक्तिर्विभाजिता ॥ ६० ॥

ह्या श्लोकांत परिधि म्हणजे वर्तुळाचा परिघ, त्याच्या संबंधीं कांहीं परिभाषिक संज्ञा आल्या आहेत. वर्तुळ परिघाचें व्यासाच्या रेषेनें सारखे दोन भाग केले असतां त्या अर्धामध्यें १८० अंश (किंवा भाग) होतात. परिघाचा जो वक्राकार तुकडा त्याला कौंस धनु किंवा चाप म्हणतात.

वर्तुळ परिघाच्या चौथ्या हिश्शा येवढा जो कौंस त्यांत ९० अंश असतात. व्यासाच्या दोन्हीं टोंकांकडून परिघाच्या वर्तुळ-रेषेवर चढत जाऊन बरोबर मध्यावर पोहोंचलें म्हणजे तो बिन्दु व्यासाच्या दोन्हीं टोंकापासून ९० अंशावरच असतो. व्यास रेषेला जर विपुववृत्त म्हणून समजलें तर शिरोबिन्दु हा ध्रुव बिन्दु समजावा लागतो. ध्रुवबिन्दुपासून विपुवापर्यंतचा जो ९० अंशाच्या वर्तुळ खण्ड त्यावर लम्बज्या मोजावयाची असते. अक्षांश हे लम्बज्येच्या वर्तुलखण्डावर विषुववृत्तापासून मोजतात. अक्षांश + लम्बज्या (ध्रुवापर्यंत) = ह्यांचें नेहमीं ९० अंश होतात. म्हणून ९० − लंम्बज्या = अक्षांश, किंवा ९० − अक्षांश = लंम्बज्या. लम्बज्ये वरील प्रत्येक अक्षांश बिन्दूंतून पूर्वपश्चिम असें एकेक अक्षांश वर्तुळ कल्पितात. ह्या वर्तुळावर उज्जयिनीच्या रेषेपासून देशान्तर ठरविलेलें असतें. ह्या वर्तुळाला स्फुटपरिधि म्हणतात.

कलादि तत्फलं प्राच्यां ग्रहेभ्यः परिशोधयेत् ॥
रेखाप्रतीचीसंस्थाने प्रक्षिपेत् स्युः स्वदेशजाः॥ ६१ ॥

भूपरिधिला लम्बज्येनें गुणावें आणि त्रिज्येनें भागावें म्हणजे इष्टिन स्थलाच्या अक्षांशांतून जाणारा स्फुटपरिधि येतो. ग्रहाच्या मध्यम दिनगतिला (योजनात्मक) देशान्तरानें गुणावें आणि (योजनात्मक) स्फुट भूपरिधिनें भागावें म्हणजे जें कला विकलादि फल येईल तें मुख्य रेषेच्या पूर्वेस आपलें स्थान असल्यास ग्रहांतून वजा करावें आणि पश्चिमेस असल्यास मिळवावें.

राक्षसालय देवौकःशैलयोर्मध्यसूत्रगाः ॥
रोहीतकम् अवन्ती च यथा सन्निहितं सरः ॥ ६२ ॥

भूमध्यरेखा लंकेपासून उत्तरेकडे रोहितक पर्वत, अवन्ती; (उज्जयिनी), कुरुक्षेत्र ह्यांतून दक्षिणोत्तर अशी दोन्ही ध्रुवबिन्दूंतून जाते अशी कल्पना केली आहे. (ह्याच रेषेला Meridian याम्योत्तर किंवा मुख्य रेखा म्हणतात.)

देशान्तर फल दोन प्रकारांनीं संभवतें. पहिला प्रकार अक्षांश—वर्तुळपरिधिवरून, आणि दुसरा प्रकार निरक्षदेशपरिधिवरून.

$$\frac{\text{देशातन्र योजनें} \times \text{ग्रहगति}}{\text{स्फुट परिधि.}} = \text{फल, निरक्ष अथवा}$$

विषुववृत्तावरील देशान्तर योजनांचा भाजक भूपरिधि असतो.

देशान्तर (Longitude) ठरविण्याच्या अनेक रीति आहेत. प्रत्यक्ष भूमापनानें; निरनिराळ्या तारांचा याम्योत्तरीय अधिक्रमणकाल, चन्द्रोदयकाल, आणि चन्द्रग्रहणकाल, ह्यांपैकीं चन्द्रग्रहणाचा काल चार मिनिटें चुकला तर देशान्तरांत एक अंशाची चुकी येईल, तारांचें अधिक्रमण चुकण्याचा संभव त्यापेक्षां कमी. म्हणून देशान्तर, प्रत्यक्ष भूमापन, आणि याम्योत्तर लंघनकाल ह्यावरून निश्चित करितात. श्लोकामध्यें सिद्धांतकारांनीं चन्द्रग्रहणावरून देशान्तर काढण्याची रीति वर्णिली आहे.

अतीत्योन्मीलनाद् इन्दोः पश्चात् तद्गणितागतात् ॥
यदा भवेत् तदा प्राच्यां स्वस्थानं मध्यतो भवेत् ॥ ६३ ॥
अप्राप्यच भवेत् पश्चात् एवं वापि निमीलनात् ॥
तयोरंतर-नाडीभिर्हन्यात् भूपरिधिं स्फुटम् ॥ ६४ ॥
षष्ट्या विभज्य लब्धैस्तु योजनैः प्राग्-अथापरैः ॥
स्वदेश परिधिर्ज्ञेयः कुर्यात् देशान्तरं हि तैः ॥ ६५ ॥

गणितानें निश्चित झालेल्या कालापेक्षां उशीरानें जर एखाद्या ठिकाणीं चन्द्रग्रहण सुटलेलें दिसेल, तर तें स्थान-बरोबर वेळेला ग्रहण सुटलेल्या स्थानाच्या-पूर्वेस असलें पाहिजे.आणि ग्रहण ठरलेल्या वेळेच्या **अगोदर** सुटलें तर पश्चिमेस आहे **म्हणून समजावें. हा नियम ग्रहण** स्पर्शकालालाहि लागू आहे.

स्पष्टीकरणः—प्रत्येक दहा पळांच्या कालाला एक अंशाचें अंतर परिधिच्या पूर्वापार स्थानांत असतें. म्हणजे ज्या ठिकाणीं दहा पळें **उशीरा सुटलें** असेल, ते स्थान मध्य किंवा याम्योत्तरस्थ मुख्य स्थानाच्या पूर्वेस एक अंशरेखांतराबरोबर आहे. असें समजावें; आणि एक घटका (म्हणजे ६० पळें) वेळेच्या अगोदर ग्रहण लागल्यास तें स्थान ६अंश मध्यस्थानाच्या पश्चिमेस आहे असें समजावें, सबंध परिधिचें भ्रमण ६० घटिकामध्यें होतें म्हणून नियम असा बसला कीं:— गणितागत काल आणि प्रत्यक्ष दृष्टकाल त्याच्या घटयात्मक अन्तरानें परिधि-योजन संख्येला (किंवा परिध्यंशांना गुणावें) आणि ६० घटीनीं भागावें म्हणजे एका घटी (काला) संबंधानें योजनसंख्या (किंवा अंशसंख्या) येईल. हेंच योजनात्मक देशान्तर होय. अंशात्मक अन्तर आणि लम्बज्या ह्या वरून निरनिराळ्या स्थानांचे स्फुट-परिधि निघतात.

वारप्रवृत्तिः प्राग्देशे क्षपार्द्धेऽभ्यधिके भवेत् ॥
तद्देशान्तर नाडीभिः पश्चादूने विनिर्दिशेत् ॥ ६६ ॥

हाच नियम (रविवारादि) वारांना लागू आहे. जेथें मध्यरात्रींपासून वार बदलतो, तेथें मध्यरात्रीच्या घटिकांत पूर्व देशान्तर काल मिळवावा आणि पश्चिम देशांतर काल वजा करावा. म्हणजे त्या त्या ठिकाणीं वार जमेल [सूर्योदयापासून वार बदल्यासहि हाच नियम, एवंच मध्य-रेखेच्या पूर्वेस. देशान्तर संस्कार धन असतो. आणि पश्चिमेकडील स्थानासंबंधानें ऋण असतो हा नियम सर्वतोपरि लागू आहे.] म्हणून

इष्ट-नाडीगुणा भुक्तिः षष्ट्या भक्ता कलादिकम् ॥
गते शोध्यं युतं गम्ये कृत्वा तात्कालिको भवेत् ॥६७ ॥

ग्रह भुक्तिला इष्ट नाडीनें (म्हणजे मध्यरेखास्थानासंबंधानें गणितागत आणि प्रत्यक्ष इष्ट कालाच्या घटयात्मक अन्तरानें) गुणावें, आणि ६० घटीनीं भागावें म्हणजे देशान्तर संबंधानें फळ येतें त्याचा संस्कार मध्यम ग्रहास करावा. तो गत इष्टकालास ऋण करावा.

भचक्रलिप्ताशीत्यंशपरमं दक्षिणोत्तरम् ॥
विक्षिप्यते स्वपातेन स्वक्रान्त्यन्ताद् अणुष्णगुः ॥ ६८ ॥

चन्द्राचा परमविक्षेप वृत्तपरिधिमध्यें जितक्या कला असतात त्यांच्या ऐंशी हिशा येवढा असतो. [वृत्त परिधिमध्यें ३६०×६०=२१६०० कळा असतात म्हणून त्याच्या ऐंशी हिस्शा येवढा म्हणजे २७० कलांचा चन्द्राचा परम विक्षेप असतो] तो विक्षेप कधीं दक्षिणेस, कधीं उत्तरेस ह्या प्रमाणें आपल्या क्रान्तिस अनुसरून आक्रमवृत्ताच्या दक्षिणेस अथवा उत्तरेस असतो.

स्पष्टीकरणः—विक्षेप आणि शर हें अगदीं एक नव्हेत. शर हा ग्रहाचे जें स्थान त्याच्या कक्षा स्थानावरून लंब रेषेनें क्रान्ति वृत्तावर् येतें त्या स्थानापासून त्या लम्ब रेषेवर मोजलेलें अंशात्मक अन्तर. इंग्रजीमध्यें शराला (Latitude) हें नांव आहे शर हा क्रान्ति वृत्ताशीं नेहमीं लम्ब रेषेंत असतो. आणि विक्षेप म्हणजे मध्यम शीघ्रान्तराचे वेळीं जो शर असतो. तो त्यामुळें तो शराशीं नेहमींच साम्य पावतो असें नाहीं.

आतां गुरु, मंगळ, बुध, शुक्र आणि शनि ह्यांचे परम विक्षेप, चंन्द्राच्या परम विक्षेप २७० कला ह्याच्या कितव्या हिस्शा बरोबर आहेत ते सांगतातः—

तन्नवांशं द्विगुणितं जीवः त्रिगुणितं कुजः ॥
बुधशुक्रार्कजाः पातैर्विक्षिप्यन्ते चतुर्गुणम् ॥ ६९ ॥
एवं त्रिघनरन्ध्रार्करसार्कार्कादशाहताः ॥
चन्द्रादीनां क्रमादुक्ता मध्यविक्षेपलिप्तिकाः ॥ ७० ॥
इति सूर्यसिद्धान्ते मध्यमाधिकारः प्रथमः ॥

चन्द्र विक्षेप कलाचा नववा हिस्सा दुप्पट केला असता गुरुचा परम विक्षेप निघतो. [नववा हिस्सा म्हणजे तीस कला, ह्याच्या दुप्पट म्हणजे गुरु विक्षेप ६० कलांचा आहे]. त्याचप्रमाणें मंगळाचा नवव्या हिस्शाच्या तिप्पट आणि बुध, शुक्र व शनि ह्यांचा विक्षेप नवव्या हिस्शाच्या चौपट आहे.

तेव्हां निष्कर्ष असा कीं:—

चन्द्र, मंगळ, बुध, गुरु, शुक्र, आणि शनि ह्यांचे **मध्यम मानाचें** *परम विक्षेप अनुक्रमें* २७, ९, १२, ६, १२, आणि १२ ह्यांना १० नें गुणून जो आकडा येईल तितक्या कला येवढा आहे. [अर्थात् चन्द्राचा २७० कला, मंगळाचा ९०, बुधाचा १२०, गुरूचा ६०, शुक्राचा १२०, आणि शनिचा १२० कला, ह्याप्रमाणें परम मध्यम विक्षेप आहेत.]

स्पष्टीकरणः—ह्या संबंधानें प्रख्यात ज्योतिर्विद्–शंकर बाळकृष्ण दीक्षित लिहितात—

"" आमच्या ग्रंथांतील विक्षेप मानें आणि आधुनिक (पाश्चात्य) मानें ह्यांची सर्वांशीं तुलना करणें बरोबर नाहीं. योग्य तुलना केली असतां आमचीं मानें सूक्ष्म आहेत असें दिसून येईल.

विक्षेपमानें शरावरून काढतात. शर म्हणजे क्रान्तिवृत्तापासून ग्रहाचें कदम्बाभिमुख अन्तर. चन्द्र हा पातापासून त्रिभान्तरित असतां त्याचें प्रत्यक्ष अन्तर नेहमींसारखें नसतें तरी अंशात्मक

अन्तर सारखेंच असतें. परंतु इतर ग्रहांचें तसें नाहीं. (त्यांचे मन्दकर्ण, शीघ्रकर्ण कमजास्त होतील त्याप्रमाणें शरांत फरक पडेल). आमच्या ज्योतिष्यांनीं दुसऱ्या [शीघ्रान्तराच्या] कारणानें होणारा फरक मात्र विचारांत घेतला आहे. शीघ्रकर्ण मध्यम असतां पात त्रिभान्तरीं ग्रह असेल तर त्यावेळीं त्याचा जो शर तोच परम—मध्यम—विक्षेप असें आमच्या ज्योतिष्यांनीं मानलें आहे. ब्रह्मसिद्धान्तातलीं आणि द्वितीयार्य सिद्धांतातलीं विक्षेपमानें तर आधुनिकांशीं फार जवळ आहेत. ....पुष्कळ वर्षें वेध केल्यावांचून हीं मानें अगदीं सूक्ष्मकरितां येणार नाहींत.... आर्यभट आणि ब्रह्मगुप्त ह्यांनीं आपलीं मानें स्वतंत्रपणें वेधावरून काढलीं आहेत हें स्पष्ट आहे."

(भारतीय ज्यो. इतिहास)

[मध्यमाधिकार समाप्त]

मध्यमाधिकारांतील विशेष गोष्टींचा खुलासा

पंचवीसाव्या श्लोकाचे स्पष्टीकरणांत "**प्रत्येक ग्रहाचें मान निरनिराळें आहे, परंतु प्रमाण मात्र सारखें आहे** आणि तें त्यांच्या कक्षेच्या अंतराशीं **अगदीं सारख्या प्रमाणांत आहे.**" असें लिहिलें त्याचा अधिक खुलासा अवश्य आहे. तो असा कीं, चंद्र, सूर्य, आणि बुधादि सप्तग्रह हे सर्व पृथ्वी भोंवतीं प्रदक्षिणा पद्धतिनें फिरतात असें भूमध्य दृष्टीनें स्पष्ट ग्रहगणितासाठीं अधिष्ठान मानलें आहे. परंतु वास्तविक स्थिति अशी आहे कीं, एकटा चन्द्र मात्र पृथ्वी भोंवतीं प्रदक्षिणाकरितो, आणि पृथ्वीसुद्धां बाकीचे बुधादि ग्रह हे सर्व रवि भोंवतीं प्रदक्षिणाकरितात. त्यांचे प्रदक्षिणाकाल आणि त्यांचीं सूर्यापासुन चीं अन्तरें ह्या गोष्टी ज्योतिष्यांनीं अत्यंत परिश्रमानें निश्चित केल्या आहेत. सूर्याभोंवती प्रदक्षिणा करणाऱ्या ग्रहांच्या अनुक्रमांत प्रथम बुध येतो. म्हणजे सूर्याच्या अतिनिकट असणारा ग्रह बुध हा होय. बुधानंतर शुक्र; हा बुधापेक्षां सूर्यापासून जास्त दूर आहे. त्यानंतर तिसरा क्रमांक पृथ्वीचा; मग मंगळ; मंगळानंतर सुमारें दिडशें लघु ग्रह आहेत. लघुग्रहांच्या कक्षेबाहेर गुरु हा अवाढव्य ग्रह आहे. गुरु नंतर शनि, आणि त्याच्या नंतर युरेनस व नेपच्युन आणि नंतर ज्याचा नुकताच शोध लागला आहे तो प्लुटो. बुधाचें सूर्यापासून अन्तर (३६४०००००) तीन कोटि, चौसष्ट लक्ष मैल आहे. शुक्राचें (६६६०००००) सहाकोटि, साहसष्ट लक्ष मैल; पृथ्वीचें (९१५०००००) नऊ कोटि पंधरा लक्ष मैल. मंगळाचें (१४००००००) चवदा कोटि मैल. गुरुचें पृथ्वीच्या पांचपटींपेक्षांहि जास्त म्हणजे ४७ कोटि ५७ लक्ष मैल. शनिचें ८७ कोटि २१ लक्ष मैल. युरेनसचें, १ अब्ज ७५ कोटि ३८ लक्ष मैल आणि नेपच्युनचे २ अब्ज ७४ कोटि ६० लक्ष मैल.

ह्याप्रमाणें कल्पनातीत अंतरें आहेत. २॥ अब्ज मैलाच्या अन्तराची आपणास कल्पनाहि होणार नाहीं. अशा कल्पनेच्या आटोक्याबाहेर असणाऱ्या अन्तरावरून ग्रह-

सूर्याभोंवतीं प्रदक्षिणा करितात. त्या अन्तरांचे स्वरूप थोडक्यांत लक्षांत यावें म्हणून म्हणून पृथ्वीच्या नऊकोटि पधराळक्ष'मैल'अन्तरास १ समजून ग्रहांचीं अन्तरें ज्योतिर्षांनीं थोडक्यांत बसवून संक्षिप्त अन्तरें आणि प्रदक्षिणाकाळाला लागणारे दिवस ह्यांचें कोष्टक खालील प्रमाणें केलें आहे.

ग्रहाचें नांव	सूर्यापासून अन्तर संक्षिप्त	प्रदक्षिणाकाल (दिवस)	काल'वर्ग अन्तर घन यांचेंप्रमाण
बुध	·३८७	८७९	·१३३४
शुक्र	·७२३	२२४·७	·१३३४
पृथ्वी	१·०	३६५ २५	·१३३४
मगळ	१·५२	६८७·	·१३३४
गुरु	५·२	४३३२॥	·१३३४
शनि	९·५	१०७५९	·१३३४
युरेनस	१९·१	३०६८६	·१३३४
नेपच्युन	३०·०	६०१२६	·१३३४

त्यावरूनच स्पष्ट दृष्टोत्पत्तिस येईल कीं, श्लोक'२५ यांत " आलम्नन्ते तुल्यमेव " म्हणजे गति आणि दूरत्व ह्या दृष्टिनें सर्व ग्रहांचें (अन्तर घन आणि काल वर्ग ह्यांचें) प्रमाण अथवा गुणोत्तर (Ratio) अगदीं तन्तोतन्त सारखें आहे. ह्या अपूर्व शोधाचें श्रेय युरोपांत केप्लर ह्या महाविद्वान् ज्योतिषाकडे, आणि आपल्या इकडे भगवान् सूर्यनारायणाच्या अंशानें कार्य करणाऱ्या अज्ञात–नाम व्यक्तिकडे आहे. व्यक्ति माहित नसली तरी ग्रंथ माहित आहे म्हणून ते श्रेय ग्रंथासहि देण्यास हरकत नाहीं.

आतां भगणाला आरंभ कोठें आणि त्याची समाप्ति कोठें हा प्रश्न उद्भवतो. भगण म्हणजे राशिचक्र अर्थात् सूर्यसिद्धान्तोक्त राशिचक्राचा आरंभ आणि शेवट कोणता ? असा प्रश्न आहे. सामान्य वाचकांसहि हें माहित आहे कीं, चक्राचा म्हणजे वर्तुळाचा जो परिघ त्यांतील ज्या बिन्दूपासून वर्तुळाला आरंभ होतो त्याच बिन्दूंत त्याचा शेवट असतो. ज्या विभागांत तारात्मक'रेवती–पुंज आहे त्या रेवती विभागाला पौष्ण हें नांव आहे, तेव्हां रेवती विभागाचा जो शेवटचा बिन्दु तोच आमच्या नक्षत्र चक्राचा किंवा राशिचक्राचा आरंभ बिन्दू होय. चक्राच्या परिघांमध्यें ३६० अंश असतात. तीनशेसाठाव्या अंशाचा अगदीं शेवटचा बिन्दू तोच राशिचक्राचा आरंभ. रेवती नक्षत्राच्या मुख्य तारेची स्थिति क्रान्तिवृत्ता संबंधानें ३५९अंश५०काळा अशी दिली आहे. क्रान्तिवृत्ताच्या दक्षिणेस फक्त तेराच कळा (शराच्या) अन्तरावर रेवतीची तारा आहे. खगोल शास्त्राच्या

नियमाप्रमाणें त्या अन्तराचा संस्कार केला असतां रेवतीच्या तारेचें क्रान्तिवृत्तांतील स्थान ३५९° ५० कलांपेक्षां ३६० अंशाच्या अन्तिम सीमेच्या अधिक **जवळ येतें.** तें इतकें कीं रेवती योगतारा (म्हणजे जिचा ध्रुवक ३५९अंश आणि विक्षेप शून्य किंवा १३कलाच आहे तीच तारा) राशिचक्राचें आरंभस्थान सूर्यसिद्धान्तकाराच्या मताप्रमाणें आहे असेंच म्हटलें पाहिजे. नाहींपेक्षां ३५९° ५०' इतका जिचा ध्रुवक आहे अशी रेवती (पैकीं जयन्ती) तारे शिवाय दुसरी तारा आकाशांत **नुसत्या डोळ्यांना** दिसणारी अशी दाखविली पाहिजे. ग्रंथांत सांगितलेल्या स्थानाशीं जिचें स्थान जुळतें अशी तारा प्रत्यक्ष दिसत असून ती आरंभस्थानीं मानण्यास अव्हेरळ करणें हें दुर्बुद्धिचें लक्षण आहे असेंच सर्व निःपक्षपाती शास्त्रज्ञ म्हणतील. आरंभस्थानाविषयीं येवढा ऊहापोह करण्याचें कारण आतां **"हा सूर्य हा जयद्रथ"** ह्याच कोटींतलें आहे. आजपर्यंत सूर्यसिद्धान्तांत अमुक आहे,तमुक नाहीं अशा गप्पांवर रेवती तारेला विरोध करणारे लोक इतरांस भुलवीत होते. आतां प्रत्यक्ष सूर्यसिद्धान्तच वाचकांच्या दृष्टीसमोर ठेवीत आहोंत. तेव्हां आतां विरोधकांनीं रेवतीतारा दाखविली पाहिजे, नाहींतर जिचा ध्रुवक ३५९ अंश ५० कला आहे तिच्या **पूर्वेस** फक्त ५।४ कला इतक्या अल्प अन्तरावरच सिद्धान्तोक्त आरंभ स्थान आहे हें मान्य केलें पाहिजे.

नाक्षत्र वर्ष ३६५ दिवस १५ घटका २३ पळे आणि सूर्यसिद्धान्ताचे मान ३६५ दिवस १५ घटी ३१॥ पळे म्हणजे नाक्षत्रापेक्षां ८॥ पळांनीं अधिक आहे त्यामुळें नक्षत्र चक्राचा गणितागत आरंभबिन्दु ८॥विकला इतक्या गतिनें **पूर्वेकडे** जातो. म्हणून ह्यामुळें घोंटाळा माजला असेल असें पुष्कळांस वाटेल, परंतु सृष्टिच्या उत्पत्तिनंतर अश्विनी नक्षत्राच्या आरंभ बिन्दूतच **सर्वग्रह एकत्र** होते अशा धोरणावरच नक्षत्रचक्राची आंखणी केली असल्यानें आणि नक्षत्रें वस्तुतः अचलच मानली असल्यानें नाक्षत्रचक्राचें **स्थिर निश्चल** आरंभस्थान रेवतीची अन्तिम मर्यादा हेंच ठरविलेलें आहे, आणि आतां वर दाखविल्याप्रमाणें त्या मर्यादेचा बिन्दू रेवतीतारेच्या पूर्वेस ५।७ इतक्याच कलांच्या अन्तराच्या आंत आहे. जास्त नाहीं. म्हणून सौकार्यास्तव रेवतीतारा हेंच आरंभ स्थान ब्रह्मगुप्त आणि भास्कराचार्य ह्यांनीं मानलें तेंच स्वाभाविक आणि योग्य आहे.

कांहीं विद्वान् असें प्रतिपादन करितात कीं, ज्याअर्थी शके ४५०ह्या वर्षी सूर्यसिद्धांताच्या पद्धतिप्रमाणें छायार्क मेष आणि गणितागत मेषारंभ हे एकाच वेळीं झाल्यानें अयनांश शून्य होतात त्याअर्थी त्याच वर्षापासून दरसाल ५०·२ विकला ह्या अयन गतिनें अयनांश धरावे.

ही विचारसरणी अयनांशाचा विचार करितांना अवश्य विचारांत घ्यावी लागेल. कारण सूर्यसिद्धांतांप्रमाणें शके ४५० हेंच "छायार्कात् करणागते'' या सूत्राप्रमाणें शून्यायनांशवर्ष आहे. परंतु आपल्या पुढें प्रश्न आहे तो शून्यायनांश वर्ष कोणतें हा नाहीं. तर राशिचक्राचें किंवा नक्षत्रचक्राचें **स्थिर निश्चल** आरंभस्थान कोणतें हा हे आहे.

त्याकरितां चल आरंभस्थानाचा विचारच उपयोगी नाहीं. शके ४५० मधील जो मेषार्क तो चल मेषार्क होय. सृष्टयुत्पत्तीनंतर ज्या अश्विन्यारंभ बिन्दूमध्यें सर्व ग्रह एकत्र होते तो बिन्दू स्थिर आहे. कारण नक्षत्रें हीं स्थिरच मानलेलीं आहेत. शके ४५० मधील मेषार्क हा शके ४२७ चा मेषार्क नव्हे. शके ४२७ चा मेषार्क आणि शके १७७ चा मेषार्क हेहि एकनव्हेत,शके शून्य ह्या वर्षीचा मेषार्क(सूर्य सिद्धान्ताप्रमाणें,तर अगदीं निराळाच येईल. आम्हांला निश्चल मेषार्क पाहिजे. म्हणून त्याकरितां **पौष्णान्ते भगण-स्मृतः** ह्याच सूत्राप्रमाणें आरंभस्थान ठरविलें पाहिजे. शके ४५० च्या शून्यायनांश वर्षाकडे दृष्टि देऊन जे आरंभस्थान येईल ते ३८।४० कलाइतकें चूक असणारच. रेवती योगतारा किंवा शून्यायनांशवर्ष ह्यामध्यें तात्विक दृष्टीनें फरक आहे परंतु जेव्हां अयनांशां च्या प्रश्नाचा खल होईल त्या तेव्हां रेवती योगतारा आणि शून्यायनांशवर्ष ह्याची बाजू एकच ठरेल तथापि अगदीं साखरेचीच सालें काढलीं तरी रेवतीतारा आणि निश्चित आरंभस्थान ह्यामध्यें तत्वतः फरक नसल्यानें रेवती योगतारा आणि तोहि निःशर हेंच सिद्धान्तोक्त राशिचक्राचें आरंभस्थान होय हें निर्विवाद ठरतें.

मागें एका कोष्टकांत ग्रहांचे प्रदक्षिणाकाल आधुनिक वेधाप्रमाणें जे येतात ते दिले आहेत. आतां आपल्या सूर्यसिद्धान्ताप्रमाणें त्यांच्या प्रदक्षिणाकालाचें कोष्टक देऊं.

ग्रहाचें नांव	नाक्षत्र प्रदक्षिणाकाल (दिनात्मक)				सूर्यासंबंधीं म्हणजे रवि–युति प्रदक्षिणाकाल (Synodical)			
	दि.	घ.	प.	वि.	दि.	घ.	प.	वि.
सूर्य (म्हणजे पृथ्वी)	३६५	१५	३१	३१	सूर्यसिद्धान्ताप्रमाणें			
बुध (शीघ्र)	८७	५८	१०		११५	५२	१२	
शुक्र (शीघ्र)	२२४	४१	५४		५८३	५४	०	
मंगळ	६८६	५९	५०		७७९	५५	१२	
गुरु	४३३२	१९	१४		३९८	५२	४८	
शनि	१०७	६५	४६	२३	३७८	४	४८	
चंन्द्र	—२७	१९	१८		२९	३१	४८	

सिद्धान्तामध्यें बुधाचे शुक्राचे भगण असें न म्हणतां बुध शीघ्र- शुक्रशीघ्र असें म्हटलें आहे. शीघ्र ह्या संज्ञेला एक विशेष अर्थ आहे त्याचें विवरण स्पष्टाधिकारांत होईलच येथें शीघ्र शब्दाचा अर्थ ज्यांची प्रदक्षिणा रवि केन्द्रा भोंवतीं (म्हणजे पृथ्वीपेक्षांहि)

त्वरित पूर्ण होते ते ग्रह इतकाच अर्थ विवक्षित आहे, म्हणून 'शीघ्र' शब्द गाळून टाकून बुधाचे, शुक्राचे भगण असें म्हटलें तरी अर्थ अगदीं तोच.

सूर्यसिद्धांतावर बर्जेस, व्हिटनें ह्या युरोपियन विद्वानानीं आपलें मत प्रदर्शन केलें आहे. त्यांनीं कल्पापासून अब्ज दोन अब्जाची वर्ष संख्या देण्याची जी पद्धति अर्थात् युगपद्धति सिद्धांतकारांनीं स्वीकारली आहे तिची बरीच थट्टा करून भारतीयांस उगीचच दूषण दिलें आहे, आणि ग्रीकांची स्तुति केली आहे. ग्रीकांच्या ग्रंथांत युरोपियनानींच घुसडाघुसडी करून ते हवें तसें सोईस्कर बनविण्याची फारच खटपट केली आहे; असें असून सुद्धां ग्रीक ग्रंथ जसें बनविलें आहेत, तसेंच कां होईना परंतु छापून प्रसिद्ध करून ते भारतीयांपुढें मांडण्याची छाती त्यांस होत नाहीं. म्हणूनच ग्रीकाचें जें ते स्तोम माजवितात तें निःसंशय खोटें आहे असें समजावें आणि त्यांनीं जी भारतीयांची टवाळी करण्याची प्रथा सुरू केली त्याबद्दल ते लेखक मूढ आहेत असें समजून त्यांचा तीव्र निषेध करावा; मात्र आपल्या ग्रंथांचा लक्षपूर्वक अभ्यास केल्यावांचून मात्र निषेध करूं नये. असें करणें वे हिमतीपणाचें होईल.

अब्ज, दोन अब्ज वर्षांचें गणित देण्याचें कारण हेंच आहे कीं, सर्व ग्रहांच्या गति भिन्न भिन्न असल्या तरी गत्यारंभ काल अतिशय दूरचा धरल्यामुळें सर्वांच्या भगणांस प्रारंभ एकदम झाला असें म्हणतां यावें; त्या योगानें क्षेपक देण्याचें कारण उरत नाहीं. आणि सर्वांचा क्षेपक शून्य असणें त्यांत जी खुबी साधते ते निरनिराळे क्षेपक देण्यांत साधत नाहीं. बीज संस्कार देऊन ग्रह शुद्ध करून घेण्याची अवश्यकता युरोपियनांस सुद्धां मान्यच आहे कारण सृष्टीचा प्रत्यक्ष कायदा युरोपियनांस थोडाच जुमानतो ! तो त्यांच्याहि मानेवर बसलाच आहे.

सूर्य सिद्धांताप्रमाणें मध्यम ग्रह काढण्याची रीति अगदीं सोपी पण प्रत्यक्ष गणिताचें काम फारच त्रासदायक आहे कारण दहा दहा बारा बारा आंकड्याच्या संख्यांचे गुणाकार भागाकार करावे लागतात. त्यानें मनुष्य जिकीरीला येतो. म्हणून कोणी कोणी कलियुगारंभ वर्षाचें, शालिवाहनशकारंभाच्या पूर्व वर्षाचे, ह्या प्रमाणें कांहीं महत्वाच्या प्रसंगीचे मेष-संक्रमणकालीन मध्यम ग्रह काढून ठेवतात. त्यांना क्षेपक म्हणतात असे क्षेपक शके १८२६ च्या श्रावण शुद्ध चतुर्थीचे केलेलें आढळलें तें येथें देतो.—

महामनु =	१८४०३२००००	कृत	१७२८०००
संधि (७)=	१२०९६०००	त्रेता	१२८६०००
२७ महायुगे=	११६६४००००	द्वापर	८६४०००
	१९६९०५६०००		३८८८०००
कलियुगाचीं वर्षे	३८८८०००		
मिळोन वर्षे	६००५		
	१९७१९४८००५		

ह्या संख्येला १२ नें गुणून महिने केले व त्यांत चैत्रापासून आषाढ अखेरचे ४ महिने मिळविले आणि ५१८४०००० इतक्या महिन्यांत १५९३३३६ अधिकमास होतात. त्याप्रमाणें त्रैराशिकानें अधिकमास काढून ते वरील महिन्यांच्या संख्येत मिळविले तेव्हां बेरीज आली ती संख्या चान्द्रमासांची झाली.

१९५५८८५००५×१२+४=
२३४७०६२००६४ हे महिने झाले त्यांत
७२१३८४७२० हे अधिकमास मिळविले
२४१९२००४७८४ हे चान्द्रमास झाले.

वरील चान्द्रमासांच्या संख्येला ३० गुणलें म्हणजे तिथि येतात त्याप्रमाणें तिथिसंख्या काढून त्यांत गततिथि मिळवून एकंदर तिथिसंख्या सृष्टिच्या आरंभापासून येते.

त्यांतून (१६०३०००००८० तिर्थीत २५०८२२५२ इतक्या क्षयतिथि असतात म्हणून) त्रैराशिकानें येणाऱ्या क्षयतिथि वजा केल्या म्हणजे निश्चळ सावनदिनांची संख्या सृष्ट्यारंभापासून येते. त्याप्रमाणें चान्द्रमासाच्या तिथि

२४१९२००४७८४
× ३०+३ गततिथि मिळोन
७२५७६०१४३५२३ तिथि त्यांत वजा
११३५६०१८६५४ क्षयतिथि बाकी

७१४४०४१२४८६९ हा अहर्गण अथवा निश्चळ दिनसंख्या किंवा दिनराशि-
ह्या संख्येला सातांनीं भागून बाकी उरेल तो वार रविवार पासून समजावा. त्याप्रमाणें वरील अहर्गण संख्येला भागिलें असता श्रावण शुद्ध ४ चा वार रविवारच येतो.

ह्या भागाकारांमध्यें बाकी सोडून देतात, हिशेबात घेत नाहींत त्यामुळें वारांत एक दिवसांची चूक पडण्याचा संभव उत्पन्न होतो. म्हणून १ कमी जास्त करून वार मिळवून अहर्गण बरोबर साधला पाहिजे.

नंतर वरील अहर्गणाला प्रत्येक ग्रहाच्या महायुगांतील भगण संख्येनें गुणून, सावन दिन संख्येनें भागलें असतां मध्यमग्रह सिद्ध होतात. हेच क्षेपक होत. हे क्षेपक मध्यरात्रीचे येतात.

सूर्यसिद्धान्त श्लोक ३४ ह्यांत महायुगांतील नाक्षत्र दिनसंख्या अथवा नक्षत्र भ्रम १५८२२३७८२८१ आणि सावन दिनसंख्या १५७७९१७८२८ असे आंकडे (श्लोक ३७ मध्यमाधिकार यांत) सांगितले आहेत. त्यावरून त्रैराशिकानें येणारा वर सांगितलेला काळ अगदीं बरोबर निघतो.

ध्रुवाची तारा ध्रु ह्या ध्रुवबिन्दूपासून सुमारें १॥° अंशावर आहे. ध्रुवतारेलाच ध्रुवस्थानी मानून सर्व सामान्य वेध घेणेंस कांहीच अडचण नाहीं. आकाश गोलाच्या आतील अन्तर्गोल पृष्ठावर ध्रुं ह्या बिंदूपासून विषुववृत्तावर पाहिजे तितके लंब काढतां येतात. परंतु हे लंब अन्त-

गोल पृष्ठावर असल्या कारणानें सपाट पातळी वरील रेषे प्रमाणें सरळ रेषेचे नसून वर्तुलात्मक असतात.

विषुववृत्ताशीं २३° २७′ कला इतका कोन करणारें आक्रम नांवाचें दुसरें एक तिर्कस वृत्त काढलें आहे. हे वर्तुलरूपच आहे. सूर्य हा आपल्या वार्षिक प्रवासामध्यें ह्याच वृत्तांतून संचार करतो म्हणून ह्या वृत्ताला आक्रमवृत्त किंवा क्रान्तिवृत्त म्हणतात. विषुववृत्तास जसा " ध्रु " हा ध्रुवबिन्दु आहे त्या प्रमाणेंच आक्रमवृत्तालाहि 'कदंब' ह्या ठिकाणीं बिन्दु आहे तो आक्रम वृत्ताचा ध्रुवबिन्दु होय. त्याला कदंबबिन्दु ह्या नांवानेंच ओळखतात.

सांगितलेल्या आकृतिमध्यें बाण-रेषांनीं आकाशाचा गोल कटाह दाखविला असून "विषु" हें त्याच्या अगदीं मधोमध असणारें विषुववृत्त आणि त्याला तिर्कस असें "आक्र"ह्या नांवानें आक्रम वृत्त दाखविलें आहे. आकाशज्योतिष ह्या पुस्तकांत आकाशगोलाविषयीं विस्तृत विवेचन आहेच तेंच अगोदर लक्षपूर्वक वाचावें; विषुववृत्ताच्या वरचा जो भाग त्याला उत्तर गोलार्ध म्हणतात त्याच्या डोक्यावर " ध्रु " ह्या बिंदूमध्यें विषुवचक्राचा आंस रोंवलेला आहे. व ह्याच आंसा भोंवतीं विषुववृत्त सर्व कटाहासह पूर्व–पश्चिम ह्या दिशेनें सतत एकसारखें गिरक्या घेत असतें. एक गिरकी पूर्ण झाली कीं एक नक्षत्रदिवस पूर्ण होतो. ह्या गिरकीला २३ तास ५६ मिनिटें ४.९ सेकंद इतका काळ लागतो.

प्रथम संज्ञा चांगल्या लक्षांत ठेविल्या पाहिजेत. ध्रुव असें म्हटलें कीं विषुववृत्ताचा ध्रुव असें समजावें आणि कदंब म्हटले कीं आक्रमवृत्ताचे ध्रुव बिंदु म्हणून समजावें. हीं नांवें चांगलीं लक्षांत राहिली आणि त्यांचें स्वरूपहि मनांत ठसलें तर ज्योतिषाचा विषय मुळींच अवघड जाणार नाहीं. विषुववृत्ताच्या ध्रुवाजवळ जशी तारा आहे तसी कदंबाच्या जवळ पास ठळक तारा नाहीं. आणि आक्रमवृत्ताच्या आसांभोंवतीं आकाशकटाह फिरत नाहीं त्यामुळें विषुववृत्त आणि ध्रुव ह्यांना वेधप्रकरणांत जे महत्व आहे तें कदंबवृत्तास नाहीं. ध्रुवापासून जसें वर्तुलात्मक लंब विषुववृत्तावर आलेले असतात तसेंच कदंबापासूनहि आक्रमवृत्तावर वर्तुलात्मक असंख्य लंब काढतां येतात.

विषुववृत्त आणि आक्रमवृत्त ह्यांना महावर्तुलें म्हणतात.

विषुववृत्तावर ध्रुवापासून येणाऱ्या लंबावर स्पष्टक्रान्ति मोजतात. ही क्रान्ति विषुववृत्तापासून ध्रुवापर्यंत ० ते ९० अंशापर्यंत अशी मोजतात. उत्तर ध्रुवाकडील क्रान्तिला उत्तर क्रान्ति आणि दक्षिण ध्रुवाकडील क्रान्तिला दक्षिणक्रान्ति अशीं नांवें आहेत.

त्याप्रमाणेंच कदंब बिन्दूपासून आक्रमवृत्तावर काढलेल्या वर्तुललंबांवर आक्रमवृत्तापासून शर ह्यानावाचें अंशात्मक अन्तर मोजतात. क्रान्तिप्रमाणेंच शर हाहि उत्तर व दक्षिण असतो. आकृतिमध्यें " श " ह्या ठिकाणीं तारा आहे. आणि ध्रुव व कदंब ह्या बिन्दुपासून निघणारे लंब "श" ह्या तारेंतून जातात; त्यामुळें ता–रा ह्या लंबरूप अन्तरास क्रान्ति; आणि श–र ह्या अन्तरास शर असें म्हणतात. क्रान्ति आणि शर हे दोन्ही ह्या ठिकाणीं उत्तरेचे आहेत.

आकाश गोलावरील सर्व त्रिकोण गोलीय असतात. तेथें सरळ रेषा एकहि नाहीं. त्या-

मुळें त्यांचें गणित गोलीय त्रिकोण मितिनें होतें गोलीय त्रिकोणांत सपाट त्रिकोणाप्रमाणें **काट-कोन भुजज्या कोटिज्या** इत्यादि प्रकार आहेत

क्रान्तिदर्शक, आणि शरदर्शक लब हे ज्या बिन्दुमध्यें अनुक्रमें *विषुववृत्त आणि आक्रम-*वृत्त त्यांना छेदितात त्या बिन्दुमध्यें जो कोन होतो तो—

गोलीय काटकोनच असतो

विषुववृत्त आणि आक्रमवृत्त हे ज्या ठिकाणीं परस्परांस छेदितात त्या ठिकाणच्या बिन्दुस **संपात बिन्दु म्हणतात.**

हे सपात बिन्दू दोन आहेत, त्यापैकीं सूर्य विषुववृत्ताच्या उत्तरेस ज्या सपात बिन्दूतून जातो त्याला **वसंत संपात** म्हणतात आकृतिमध्यें स म र हा आक्रम वृत्ताचा भाग विषुवाच्या उत्तरेस आहे तो " स " पासून सुरू होतो म्हणून " स " हा वसत सपात होय. *विषुववृत्त हें* दरवर्षी थोडें थोडें दक्षिणेस हटत आहे त्यामुळें सपात बिन्दू हे प्रतिवर्षी ५० २ विकला मागें मागें सरकतात हेंच **संपातचलन** होय ह्या सपात चलनामुळें ऋतुचक्रांत आणि आपल्या ज्योतिषाच्या इतिहासात मोठ्या घडामोडी झाल्या आहेत

वसत संपातापासून पूर्वेकडे (म्हणजे उजवीकडे) आक्रमवृत्तावर जें **अंशात्मक** अन्तर मोजतात त्याला **भोग** अशी सज्ञा आहे (ह्यालाच इग्रजामध्यें Longitude म्हणतात) आणि संपातापासूनच पूर्वेकडे विषुववृत्तावर जें **अंशात्मक** अन्तर मोजतात त्याला **विषुवांश** म्हणतात आकाश कटाह हा **विषुववृत्ताच्या मार्गानें** पूर्वेकडोन पश्चिमेकडे रोजरोज गिरक्या घेतो हें वर सांगितलेंच आहे त्यामुळें विषुवांचा एक फेरा २४ तासांत किंवा ६० घटकेंत पुरा होतो अर्थात् ६० घटिकात ३६० अश तर एका घटिकेंत सहा अश किंवा एका तासांत १५ अश असें प्रमाण बसतें म्हणून युरोपियन पद्धतिमध्यें अशात्मक विषुवांश न सांगता ते तासात्मक सागतात, म्हणजे (सपातापासून) १५ विषुवांश असें न म्हणतां विषुवकाल १ तास असें इग्लिश पद्धतित म्हटलें जातें, एकूण मतलब एकच आतां ग्रहांची स्थिति गति सांगण्याची पद्धति अशी —

आकाशांतील ग्रहाची **गति, स्थिति** किंवा **स्थान** हें सांगणें झाल्यास आक्रमवृत्तस्थ भोग आणि त्याचा आलम्ब ह्या जोडीनें, किंवा विषुवांश आणि क्रान्ति ह्या जोडीनें सांगतात. भोग आणि शर, किंवा विषुवकाल आणि क्रान्ति, ह्यांच्या व्यतिरिक्त आणखी एक जोडी आहे

आपल्याला क्षितिज दिसतें आणि कळतें, पाहणारा कोठेंहि असो त्याला त्याच्या **थेट डोक्यावर** आकाशामध्यें अतिशय उच असा एक बिन्दू आढळतो कारण आकाश हें गोल-घुमटाप्रमाणें किंवा उघडलेल्या प्रचण्ड छत्रीप्रमाणें आपल्या डोक्यावरच उभारलेलें दिसतें परतु तें *सर्व बाजूनीं क्षितिजापर्यंत भिडून राहून त्याचा कगोरा क्षितिजावर चिकटला आहे असें वाटतें* त्या कारणानें क्षितिज हें सपाटीच्या भागावर आणि अतिशय उच असा बिन्दू तो आकाशामध्यें पाहणाराच्या अगदीं डोक्यावरच अशी स्थिति असते ह्या उच बिन्दूस **खस्वस्तिक** (अथवा Zenith) म्हणतात

आक्रमवृत्ताला जसा शर हा लम्बरूप असतो, आणि तो कदम्बबिन्दू पासून निघतो

विषुववृत्तावर ध्रुव बिंदूतून याम्योत्तर वर्तुळें अशीं लंबरूपानें येऊन शकतात; त्याचप्रमाणें ख-स्वस्तिकांतून क्षितिजापर्यंत असंख्य वर्तुळें लंबरूपानें जाऊन मिळतात. त्यांना **नतोन्नत** वर्तुळें म्हणतात. ह्या नतोन्नत वर्तुळावर क्षितिजापासून ० शून्य धरून खस्वस्तिकापर्यंत ९० अंश ह्याप्रमाणें अंतर मोजतात. त्यांना उन्नतांश म्हणतात. विषुव आणि आक्रम वृत्त ह्यावरील पूर्वपश्चिम अंतर मोजण्याला आरंभ ज्याप्रमाणें संपातापासून करावयाचा त्याप्रमाणें क्षितिज वर्तुळावर अंतर मोजण्यासाठीं ध्रुव बिंदुतून जें नतोन्नत वर्तुल ख–स्वस्तिकापासून निघून क्षितिजापर्यंत मिळते त्या बिंदुपासून आरंभ होतो तो उत्तर बिंदूपासून पूर्व बिंदूपर्यन्त, नंतर तेथून दक्षिण बिंदुपर्यंत ह्या प्रमाणें अंतर मोजतात ह्या अंतरास **अग्रा** म्हणतात.

आकाशांत कोणताहि बिन्दु असो, कोणताहि ग्रह किंवा तारा असो त्यांतून हे तीनहि प्रकारचे लंब, गेलेच पाहिजेत, आणि जाऊं शकतात. (१) ध्रुवांतून **याम्योत्तर**, (२) कदम्बातून कदंम्बमोत असें **शर वर्तुल**, आणि (३) खस्वस्तिकांतून क्षितिजापर्यंत **नतोन्नत वृत्त.**

म्हणून **तारांचे स्थान** किंवा ग्रहांची गति आणि स्थान, सांगणें असल्यास भोग आणि शर, किंवा विषुवांश आणि क्रान्ति, अथवा **आग्रा** आणि उन्नतांश ह्यापैकीं कोणत्याही एकाच जोडीनें, किंवा दोन जोडया घेऊन त्यांच्या योगानें सांगतात. बहुत करून भोग आणि शर, व विषुवांश आणि क्रान्ति, ह्या जोडीनें सांगतात. ह्या जोडयांना **वेधज्ञापक** म्हणतात.

प्रत्यक्ष वेध म्हणजे (तारा, ग्रह ह्यांचें) अवलोकन, **उन्नतांश, क्रान्ति** आणि तत्कालीन **विषुवांश काल** ह्यांच्या योगानें करून त्यांचीं टाचणें करून ठेवतात; अनेक वर्षांच्या, अनेक ज्योतिष्यांनीं केलेल्या अशा शेंकडों टांचणावरून ग्रहांच्या कक्षा, दूरत्वें, प्रदक्षिणा–काळ, मन्द फलें इत्यादि अज्ञात गोष्टींचा उलगडा होऊन ज्योतिःशास्त्राला आजचें स्पृहणीय स्वरूप प्राप्त झालें आहे.

आकाशांतील ग्रहांची गति, स्थिति, स्थानें ज्या पद्धतिनें सांगतात ती पद्धति गोलीय त्रिकोणांची असून सर्व अंश, कला इत्यादि भाषा वर्तुळा संबंधानेंच योजलेली असते. फक्त ग्रहांची सूर्यापासून किंवा पृथ्वीपासूनची अन्तरें ज्यांना कर्ण म्हणतात तीं अन्तरें आणि वर्तुळ (परिघ) च्या " ज्या " मात्र सरळ रेषांनीं ह्या प्रदर्शित करितात आणि त्या संबंधाचे त्रिकोण हे सरळ रेषांनींच बनलेलें असतात.

उत्तरगोलार्ध—आकाश विषुवाच्या उत्तरेकडील अर्धगोल.

ध्रुव—उत्तर गोलाचा, आणि दक्षिण गोलाचा शिरोबिन्दू.

कदंब—आक्रम-वृत्ताच्या मध्यातून जाणाऱ्या अक्ष रेषेचें टोंक.

नाक्षत्र दिवस—विषुववृत्ताच्या एका अक्ष परिभ्रमणास लागणारा काल. हा २३ तास ५६ मिनिटें ४.९ सें इतका मध्यम मानानें आहे. इतक्या काळांत संबंध विषुववृत्ताचें अक्षभ्रमण ३६० अश होतें.

आक्रमवृत्त आणि विषुववृत्त ह्यांच्या मध्यें जो कोन आहे तो २३° २७′ काल इतका आहे, ह्यालाच सूर्याची परम–क्रान्ति किंवा क्रान्ति कोन म्हणतात. हजारों वर्षांपूर्वी हा कोन २३॥ अंश होता म्हणून आपल्या प्राचीन ग्रथांत परमक्रान्ति २४ अंश मानली आहे.

क्रान्ति—म्हणजे विषुववृत्तापासून ध्रुवापर्यंत काढलेल्या लम्ब वृत्तावरील विषुवापासूनचें अंशकलात्मक अन्तर.

शर—आक्रमवृत्तापासून कदम्बप्रोत लम्बावरील अंशकलात्मक अन्तर.

संपात—आक्रमवृत्त आणि विषुव ह्यांचा छेदन बिन्दू. ह्याला पूर्वेकडोन पश्चिमेकडे ५०·२ विकला इतकी वार्षिक गति आहे.

याम्योत्तर अथवा ध्रुवातून विषुववृत्तावर जीं असंख्य लम्बवृत्तें काढतां येतात त्यापैकीं प्रत्येक. अशीं लम्बवृत्ते कमींत कमी ३६०×६०×६० इतकीं काढली पाहिजेत.

विषुवांश—याम्योत्तरांच्या योगानें विषुववृत्ताचें होऊं शकणारे, अंश, कला, विकलात्मक भाग. हे १५ अंशांना एक तास अशा पद्धतीनेंहि सांगतात.

अक्षांशवृत्तें—विषुववृत्ताला **समान्तर** अशीं वर्तुळें हीं ध्रुवापर्यंत काढतां येतात. ह्या सर्व वर्तुळाचें मध्यबिन्दू अक्षसूत्रांमध्येंच असतात.

अक्षांश—अक्षवृत्तांच्या योगानें पडलेलें याम्योत्तर वर्तुळाचे भाग; अथवा विषुववृत्तापासून **दक्षिणोत्तर** लम्बान्तर. अक्षांश पलभेवरून ठरवितात, किंवा पलभा अक्षांशावरून ठरते.

रेखांश—एखाद्या विशिष्ट याम्योत्तरवृत्तापासून अक्षांशवृत्तावर किंवा विषुववृत्तावर मोजलेलें **पूर्वपश्चिम** अन्तर. विषुववृत्ताच्या एका अक्षभ्रमणास २४ तास किंवा ६० घटिका लागतात. म्हणून $\frac{३६०}{२४}$ अंश हें कालात्मक रेखान्तर झालें.

खस्वस्तिक—पहाणाराच्या थेट डोक्यावरील आकाशांतील बिन्दू.

उन्नतांश—क्षितिजापासून खस्वस्तिकापर्यंतचें लम्बरूप अंतर.

क्षितिज—पृथ्वीच्या सपाटीची दृश्य सीमा.

(गोलीय त्रिकोणाच्या बाजू वर्तुलखंडेंच असतात.) (मध्यवर्ती काटकोनांच्या योगानें) वर्तुळाचे सारखे चार भाग होतात. ह्यांना वर्तुळाचीं चार " पदें " म्हणतात. प्रथम, तृतीय पदें हीं विषम आणि द्वितीय चतुर्थ हीं युग्मपदें. वर्तुळ चतुर्थांशांत ९० अंश असतात.

स्पष्टाधिकार [प्राथमिक विवरण]

स्पष्टाधिकार म्हणजे ग्रहाचे स्थान आकाशांत प्रत्यक्ष दृष्टीला जेथें (ज्या नक्षत्रावर, ज्या तारेपासून अमुक इतक्या अन्तरावर आहे असें) दिसेल तेथेंच तो आहे असें गणितानेंहि वर्तविता येणें. ह्या प्रकाराला, गणित पद्धतिलाच स्पष्टाधिकार म्हणतात. गणितानें वर्तविलेल्या ठिकाणीच बरोबर ग्रह असला व दिसला म्हणजे तो स्पष्ट झाला व त्या गणिताचा दृक्प्रत्यय आला असें म्हणतात. ग्रहाचे स्पष्ट गणित करतांना त्रिकोण मितिच्या गणिताची माहिती अवश्य आहे. सिद्धांत गणित करतांना त्रैराशिक व वर्गमूळ काढण्यापर्यंत अंकगणित, समीकरणापर्यंत बीजगणित आणि काटकोन त्रिकोण, कचित् गोलीय त्रिकोण ह्यांचे मापन इत्यादि गणित गणकास उत्तम येत आहे असेंच सिद्धान्तकारांनी गृहीत धरलें आहे.

स्पष्टाधिकारांत, भुज, भुजज्या, कोटिज्या, कर्ण, त्रिज्या, परिधि इत्यादि संज्ञा व त्या संज्ञांनीं निर्दिष्ट अशीं परिमाणें ह्यांची साधारण तरी माहितीं असल्याशिवाय ग्रंथच समजणार नाहीं. म्हणून त्रिकोण मितिच्या कांहीं संज्ञांची त्रोटक माहिती देतों.

सरळ रेषा म्हणजे काय किंवा काटकोन आणि वर्तुळ म्हणजे काय हें वाचकांस चांगलें अवगत आहे असें समजण्यास हरकत नाहीं. पुढील आकृतींत " च-छ-स-ग " हें वर्तुल आहे. त्याच्या वाटोळ्या गरगरीत रेषेसच **परिघ** किंवा **परिधि** म्हणतात. " च-छ-स-ग " ही वाटोळी रेषाच परिघ किंवा परिधि आहे. " क " हा त्या वर्तुळाचा मध्य बिन्दु हा अगदीं मधोमध असतो, आणि त्याच्या पासून परिघापर्यंत जितक्या सरळ रेषा काढाव्या तितक्या सर्वांची लांबी अगदीं एक सारखी असते यत्किंचित्‌हि कमीजास्त नसते. ह्या सर्व रेषाना **त्रिज्या** म्हणतात. त्रिज्या, परिघ (परिधि) ह्या सर्वांचा अर्थ अगदीं पक्का लक्षांत ठेवावा. परिघामध्यें कोठेंहि दोन बिन्दू ह्या (उदाहरणार्थ घ. प.) ह्या दोन बिन्दूना जोडणारी रेषा " घ-ट " काढा म्हणजे " घ-ग-ट " हा जो वर्तुळाचा तुकडा दिसतो. त्याला कौंस, भुज, धनु किंवा चाप, म्हणतात आणि " घ-ट " ह्या रेषेला त्या चापाची किंवा धनुष्याची ज्या (म्हणजे ताणलेली दोरी) असें म्हणतात. वर्तुळाचा कोणताहि तुकडा " भुज " होऊं शकतो आणि त्या प्रत्येक भुजाला किंवा चापाला "ज्या" काढतां येते. तिलाच "**भुजज्या**" असेंहि नांव आहे.कारण भुजाची "ज्या" ती भुजज्या. भुजज्येवर वर्तुळमध्यापासून ओलंब्यात असणारी रेषा काढली म्हणजे ती रेषा आणि भुजज्या ह्यांचा जो कोन होतो तोच काटकोन "घ-ट" ह्या भुजज्येवर " क ख " ही रेषा लंबरूप आहे. म्हणून " ख " ह्या ठिकाणीं काटकोन होतो. जेथें दोन रेषा परस्पराशीं लंबरूप असतात तेथें काटकोन व्हावयाचाच. " घ-ट " ही जरी " ज्या " आहे तरी गणितांमध्यें " घ-ख " ह्या अर्ध्या तुकड्यालाच भुजज्या म्हणतात. आतां **भुजज्या** म्हणजे **अर्धज्या** हाच अर्थ कायम झाला. " क ख-घ " हा जो काटकोन त्रिकोण आहे त्यांत " ख " हा काटकोन आणि " क " आणि " घ " हे परस्पराशीं पूरक कोन आहेत कारण त्या दोहोंचा मिळून एक काटकोन बनतो. " क " ह्या पूरक कोनासमोर जी रेषा (ख घ) ती त्या कोनाची **भुजज्या**. आणि त्याच्या जवळ चिकटलेली जी (क-ख) रेषा ती त्या कोनाची **कोटिज्या** असें म्हणण्याचा प्रघात आहे. भुजज्या, आणि कोटिज्या ह्या परस्पराशीं (" ख " ह्या ठिकाणीं) काटकोन करितात. काटकोनासमोरची (क-घ ही) त्रिकोणापैकीं जी सर्वांत मोठी रेषा तिला **कर्ण** असें नांव आहे.

वर्तुळाच्या मध्यबिन्दूतून जाणारी, आणि मध्यबिन्दूच्या दोन्हीं बाजूस थेट परिघापर्यंत जाऊन भिडणारी जी सर्वांत मोठी रेषा तिला **व्यास** असें बडे नांव आहे. व्यासरेषेची लांबी दोन त्रिज्या येवढी असते. म्हणून आतां परिमाणें बनलीं तीं अशीं; क-ख-घ हा काटकोन त्रिकोण त्यात

(१) ख हा काटकोन. काटकोन करणाऱ्या ज्या दोन रेषा त्या पैकीं एक **भुजज्या** आणि दुसरी कोटिज्या.

(२) क—घ हे परस्पर पूरक कोन.

(३) पूरक कोनाच्या समोरची रेषा ती त्या कोनाची भुजज्या, आणि जवळची रेषा ती कोटिच्या.

(४) काटकोना समोरची मोठी रेषा ती त्या त्रिकोणाची कर्णरेषा.

(५) वर्तुळाच्या मध्यबिन्दुपासून परिघापर्यंत भिडणारी जी सरळ रेषा ती त्रिज्या.

(६) मध्य बिन्दूतून दोहोकडे परिघापर्यंत थेट भिडणारी मोठी रेषा ती व्यास रेषा; = हा दोन त्रिज्या येवढा असतो.

(७) वर्तुळाच्या परिघाचे एकसारखे ३६० भाग करितात त्यांना भाग किंवा अंश म्हणतात.

च–घ–ग हें एक काटकोनी वर्तुळ खण्ड आहे. म्हणजे ह्या वर्तुळ खण्डाच्या " च " आणि " ज " ह्या टोकातून वर्तुळ मध्यापर्यंत त्रिज्या काढिल्या असतां त्यांच्या मधील ग–क–च कोन हा काटकोन होतो.

(८) " क–ख–घ " ह्या काटकोन त्रिकोणांत " ख " हा काटकोन असल्यानें "क" ह्या कोनाची " ख–घ " रेषा ही भुजज्या होय आणि ग–घ हा त्या " ज्ये "चा भुज, किंवा कौस आहे आणि " च–घ " हा जो (काटकोनी वर्तुळ खण्डापैकीं) शिल्लक राहिलेला तुकडा तें कोटिज्या–खण्ड होय. भुजज्या खण्ड, आणि कोटिज्या खण्ड मिळोन एक चतुर्पांश वर्तुळ (म्हणजे ९० अंश) होते.

वर्तुळांमध्यें दोन व्यास रेषा परस्पराशीं काटकोनांत असल्या (उदा० छ-ग रेषा, आणि च-स रेषा) म्हणजे त्या वर्तुळ परिघाचें बरोबर चार सारखे तुकडे करतात. " च छ "; "छ-स " " स ग ", " च-ग " हे चार सारखे तुकडे म्हणजे परिघखण्ड आहेत. वर्तुळाचे अंश ३६० म्हणून त्या प्रत्येक भुजाच्या टोकांशीं असलेल्या (छ-क आणि च-क हा) त्रिज्यांनीं " क " ह्या ह्या मध्य बिन्दुत काटकोन बनतो म्हणून प्रत्येक काटकोनांतहि ९० नव्वद अंश होतात म्हणूनच कोणताहि कोन अशकला विकला सत्येनें मोजतात.

उदाहरणार्थ छ-क-स हा काटकोन–क ह्या बिन्दूंत होतो. (कोन–दर्शक अक्षर मध्यें लिहितात.) त्यांत ९० अंश आहेत. छ क-द हा अर्धा काटकोन. त्यांत ४५ अंश; छ-क-त हा पाव काटकोन; त्यांत २२॥ अंश. ह्याप्रमाणें १ अंशापासून ९० पर्यंत आणि ९१ पासून १८० पर्यंत तेथून २७० अंश आणि ३६० वर्तुळ परिघामध्यें कोन बनतात. कोन दोनच रेषांनीं बनतो व तो मध्य बिन्दूमध्यें असतो.

आतां मध्य बिन्दूंत कोन कसकसे होतात तें पहा:—

क. ग ही मुख्य त्रिज्या ठरवावी. ती कोनाचा पाया किंवा तलरेषा होय.

(९) ती कोनाचा पाया किंवा तलरेषा होय.

क–ग रेषेचा " क–घ " रेषेशी क ह्या ठिकाणी अर्धाकाटकोन म्हणजे ४५ अंशाचा कोन झाला.

क–ग रेषेचा क-च रेषेशी " क " मध्येंच काटकोन नंतर होतो नंतर क–ट रेषेशीं दीड

काटकोन होतो. नंतर क-ग-आणि क-छ रेषांचा १८० अंशाचा कोन हा कोन सरळ रेषेंतच होतो. ह्याला दोन काटकोन म्हणतात.

नंतर क-ग रेषेचा क-द रेषेशी-व नंतर क-स रेषेशी तीन काटकोनी (म्हणजे २७० अंशाचा कोन.) नंतर तेथून क स त्रिज्या पुढें सरकून " क-ग " शी पुनः चिकटे पर्यंत असेच निरनिराळे कोन होतात.

(१०) वर्तुळ केवढेंही मोठें असो किंवा लहान असो त्याच्या परिघाचे एकसारखे अंश ३६० च करावयाचे. एका अंशामध्यें ६० कला, आणि एका कलेमध्यें ६० विकला ह्या प्रमाणें वर्तुळाच्या परिघाचे भाग होतात. अंशाच्या प्रत्येक टोका पासून मध्यबिंदू पर्यंत त्रिज्याकाढली तर प्रत्येक अंशाचा निदर्शक असा मध्यबिन्दूच्या ठिकाणी एकेक कोन होईल त्याची आकृती साधारण-पणें गाडीच्या चाकासारखी दिसेल. तेव्हां एक अंशाचा, दहा अंशांचा कोन असें म्हटलें कीं, वर्तुळ परिघाचा तितका तुकडा, आणि त्या तुकड्याच्या दोन्ही टोकांपासून मध्य बिन्दूपर्यंत त्रिज्या काढून त्या दोन त्रिज्या मधील कोन; इतका अर्थ स्पष्ट ठरलेला असतो. उदाहरणार्थः—

१५ अंशांचा कोन म्हणजे १५ अंशांचा वर्तुळ खण्ड आणि त्याच्या त्रिज्यांनीं मध्य बिंदूत होणारा १५ अंशांचा कोन. ह्याप्रमाणें कोनांचे अंश, आणि अंशांचे कोन सांगितले असतात. वर्तुळ परिघांतील अंशकला संख्येनेंच कोन निर्दिष्ट केला जातो.

(११) प्रत्येक त्रिकोणांत जे तीन कोन असतात त्या सर्वांची बेरीज दोन काटकोना इतकी म्हणजे १८० अंश असते.

(१२) ज्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूच्या रेषा अगदीं सारख्या असतात त्याला समभुज त्रिकोण म्हणतात (आकृति पहा)

(१३) समभुज त्रिकोणाचे तिन्ही कोन अगदीं एक सारखे असतात. तिन्ही मिळोन १८० अंश तेव्हां प्रत्येक कोन ६० अंशांचा असें ठरलें. (उदा. आकृति ह्या अ, ऊ, आ हे प्रत्येकी ६० अंशांचे कोन आहेत. कोणत्याहि त्रिकोणाचें मापन काटकोनाच्या योगानेंच करितात.

(१४) अ—उ—आ ह्या समभुज त्रिकोणांत इ—उ ही रेषा—अ—आ रेषेच्या मध्या-पासून उ टोकापर्यंत लंबरूप आहे. म्हणून इ-उ रेषेच्या दोन्ही बाजूस दोन काटकोन होतात. इ-उ-आ त्रिकोणांत इ- हा काटकोन; आणि उरलेल्या आ आणि ऊ ह्या दोन कोनांचा मिळोन एक काटकोन. आ आणि ऊ हे एकमेकांचे पूरक कोन.

(१५) आ इ उ ह्या त्रिकोणांत इ ह्या काटकोन, म्हणून त्याच्या समोरची आ—उ रेषा हा कर्ण.

आणि आ कोनाच्या समोरची इऊ रेषा आ कोनाची भुजज्या, आणि उ कोना समोरची आइ रेषा उ कोनाची भुजज्या. आ कोनाजवळची आइ रेषा ही " आ " कोनाची कोटिज्या; आणि इऊ रेषा "उ" कोनाची कोटिज्या.

(१६) कोनांचा मध्य बिंदू धरून वर्तुळ काढलें तर कोननिदर्शक वर्तुळ खण्ड हा त्या कोनाचा भुज होतो. भुज म्हणजे कोन निदर्शक वर्तुळ परिघाचा तुकडा. आणि " ज्या " म्हणजे त्या तुकड्याची टोंकें सांधणारी रेषा. भुजज्या म्हणजे त्या रेषेचा अर्धा भाग.

(१७) काटकोन त्रिकोणाच्या दोन बाजू पैकी एक भुजज्या आणि दुसरी कोटिज्या असते आणि समोर कर्ण रेषा असते.

(१८) भुजज्येची लांबी, अंश अंगुळें इंच इत्यादि कोणत्याहि मापानें मोजण्यास हरकत नाहीं.

(१९) भुजज्येचा वर्ग, अधिक कोटिज्येचा वर्ग मिळून जी संख्या येते ती कर्ण रेषेच्या वर्गाबरोबर असते. (उदाहरणार्थ अ इ-उ ह्या त्रिकोणां इ ह्या काटकोन आहे म्हणून अइं (वर्ग) +इउं (वर्ग) =अउं असें समीकरण अगदीं ठरलेलें आहे म्हणून अइं+इउं ह्यांच्या बेरजेच्या वर्ग-मूळाबरोबर कर्ण रेषेची लांबी असते

(२०) सबध परिघ ३६० अंश असतो आणि त्याचा व्यास ११४.६ अंश आणि त्रिज्या ५७.३ अंश असते. हेहि वरच्याप्रमाणें पक्के ध्यानांत ठेवावें

सिद्धांतपद्धतिप्रमाणें भुजज्येची लांबी (दैर्ध्य) हीच " ज्या ". परंतु युरोपियन पद्धति-प्रमाणें भुजज्यारेषेला कर्णानें भागून जो अपूर्णांक (किंवा पूर्णांक) येईल त्याला भुजज्या म्हणतात. युरोपियन पद्धतिप्रमाणें —कोटिज्येलाहि कर्णरेषेनें भागावें लागतें

$$\frac{\text{भुजज्या}}{\text{कर्णरेषा}} = \text{ज्या (दोर्ज्या)}, \qquad \frac{\text{कोटिज्या}}{\text{कर्णरेषा}} = \text{को—ज्या}$$

$$\frac{\text{भुजज्या}}{\text{कोटिज्या}} = \text{स्पर्शरेषा}, \qquad \frac{\text{कोटिज्या}}{\text{भुजज्या}} = \text{को—स्पर्श.}$$

सिद्धांतमतानें
आणि पाश्चात्य-मतानें } १ — कोटिज्या = उत्क्रमज्या.
('एक ' म्ह० त्रिज्या)

(२१) सबध वर्तुळपरिघात २१६००कला असतात, आणि त्रिज्येमध्यें ३४३७.७५ कला असतात, म्हणूनच सिद्धांतकारानीं ३४३८कलांची परमज्या किंवा त्रिज्या मानली आहे. त्रिज्येच्या दुप्पट व्यास-कला असतात. युरोपियन गणितामध्यें त्रिज्येचें मान हेंच. निराळें नाहीं.

॥ स्पष्टाधिकारः ॥

अथ द्वितीयोऽध्यायः

अदृश्यरूपाः कालस्य मूर्तयो भगणाश्रिताः ॥
शीघ्र-मन्दोच्च-पाताख्या ग्रहाणां गतिहेतवः ॥ १ ॥
तद्वातरश्मिभि र्बद्धास्तैः सव्येतर-पाणिभिः ॥
प्राक्पश्चादपकृष्यन्ते यथासन्नं स्वदिङ्मुखम् ॥ २ ॥

प्रवहाख्यो मरुत् तांस्तु स्वोच्चाभिमुख-मीरयेत् ॥
पूर्वापरापकृष्टास्ते गतिं यान्ति पृथग्विधाम् ॥ ३ ॥
ग्रहात् प्राग्भगणार्द्धस्थः प्राङ्मुखं कर्षति ग्रहम् ॥
उच्चसंज्ञोऽपरार्द्धस्थं उद्वत् पश्चान्मुखं ग्रहम् ॥ ४ ॥

ग्रहाचे " भगण " म्हणजे परिभ्रमणाचे जे मार्ग त्या मार्गावर " काळा"चीं स्वरूपें अदृश्य रूपानें (ठाणें देऊन) राहिलेलीं आहेत ग्रहाचे शीघ्रोच्च, नीचोच्च, मन्दोच्च आणि कक्षापात हीं तीं स्वरूपें होत ग्रह आपआपल्या कक्षामध्यें निरन्तर फिरत आहेत त्यांच्या गतिचें कारण हीं काळ–स्वरूपें होत १

(ग्रह हे) प्रवह वायुरूप लगामानें जखडलेले आहेत उच्च, नीच आणि पात ह्या शक्ति, ते लगाम आपल्या दोन्ही हातानीं धरून त्या ग्रहाना केंव्हा मागें खेचून केंव्हां पुढें दामटून आपल्या दिशेकडे आपल्या जवळ ओढून नेतात २

प्रवहवायु (हा तर ग्रहगतिचें मुख्य कारण तो प्रवहवायु) ग्रहाना आपआपल्या उच्च (नीच) बिन्दूकडे पश्चिमेकडून पूर्वेकडे खेचीत नेतो बहुतेक पूर्वेकडे (परतु नतर) पश्चिमेकडे त्यांना ओढून तो (वायु) त्या ग्रहांच्या ठिकाणीं निरनिराळी गति उत्पन्न करितो ३

प्रत्येक ग्रहाचें उच्च त्याच्या समोर पूर्वदिशेकडे असतें तें उच्च त्याला पूर्वेकडे ओढतें नीचोच्च बिन्दू हा पश्चिमेकडे असतो तो त्याला पश्चिमेकडे ओढतो (ह्याप्रमाणें ग्रह हे सदैव चक्राकार गतिनें फिरत असतात) ४

स्पष्टीकरणः—ग्रहांना गति कां असावी, आणि ती चक्राकार मार्गाचीच कां असावी त्याचें कारण सिद्धान्तकारांनीं, उच्च, नीच (आणि पात) ही जीं विशिष्ट स्थानें ग्रहमार्गावर आहेत, त्यांना काळाची स्वरूपें मानून त्यांच्याकडे सोपविलें आहे ग्रहगतिचें आधुनिक दृष्टिनें कारण, ग्रहांची केन्द्रापसरण शक्ति आणि सूर्याची आकर्षण शक्ति अशा दोन कारणांचा मिळाफ होय प्रवह वायु **लगामानें** ग्रहांना मागें खेचतो आणि पुढेंहि दामटतो ह्या उत्प्रेक्षेंत **अपसरण** आणि **आकर्षण** ह्या दोन्हीं शक्तिंचीं कल्पना सूचित केली आहे नीचोच्च हें स्थान सूर्याच्या **जवळ** असतें, आणि मन्दोच्च हें **दूर** असतें मात्र हीं दोन्हीं स्थानें परस्परांपासून बरोबर १८० अंश अंतरावर असतात.

पात हेहि बिन्दूच आहेत ग्रहकक्षा (म्हणजे ग्रहांचा भ्रमण मार्ग) आणि भूकक्षा हे एका पातळींत नाहींत परस्परांशीं कलते आहेत त्यामुळें ग्रह आपल्या कक्षेंत फिरताना फक्त पात बिन्दूच्या ठिकाणींच भूकक्षेंत कांहीं अल्प काळ असतो म्हणून ग्रह हा कक्षपाताच्या स्थानीं असतांना पृथ्वी, ग्रह आणि सूर्य हे एका रेषेंत आले, तर ग्रहण, अधिक्रमण, इत्यादि चमत्कार घडू शकतात

स्वोच्चापकृष्टा भगणैः प्राङ्मुखं यान्ति यद् ग्रहाः ॥
तद्‌वेषु धनमित्युक्तमृणं पश्चान्मुखेषु तु ॥ ५ ॥

ग्रहांच्या नीचोच्च शक्तींनीं ग्रहांना खेंचून दामटलें म्हणजे आपल्या मार्गांनीं जेव्हां ते पूर्वेकडे

धांवतात तेव्हा त्याचीं गति " धन " आहे असें ज्योतिषी समजतात, आणि जेव्हां उलट फिरतात (म्हणजे पूर्वेकडून पश्चिमेकडे फिरतात) तेव्हा ती " ऋण " आहे असें म्हणतात

गति " धन " असते तेव्हां ग्रहाची दिनगति मध्यम गतिपेक्षां ज्यास्त असते

दक्षिणोत्तरतोऽप्येवं पातो राहुः स्वरंहसा ॥
विक्षिपत्येष विक्षेपः चन्द्रादीना-मपक्रमात् ॥ ६ ॥
उत्तराभिमुखं पातो विक्षिपत्यपरार्द्धगः ॥
ग्रहं प्राग्भगणार्द्धस्थो याम्यायामपकर्षति ॥ ७ ॥

ग्रहाचे कक्षापात आणि चन्द्रकक्षेंतील राहु हे आपल्या जोरानें ग्रहाना आणि तसेंच चन्द्राला पृथ्वीकक्षेच्या मार्गांतून केव्हां उत्तरेला आणि केव्हां दक्षिणेला ह्या प्रमाणें बाजूस ढकलतात ग्रहांच्या आणि चन्द्राच्या अशा रीतीनें पृथ्वीच्या मार्गातून बाजूस ढकललें जाण्याच्या प्रकाराला विक्षेप म्हणतात ६

पश्चिमेकडे अर्ध्यावाटेवर असणारा एक कक्षापात ग्रहाला तेथून उत्तरेकडे ढकलतो, आणि दुसरा कक्षापात (पहिल्याच्या अगदीं समोर) पूर्वेकडे अर्ध्या वाटेवर राहून त्या ग्रहाला (दुसऱ्या बाजूस) दक्षिणेकडे ढकलतो ७

स्पष्टीकरणः—हे ढकलणें निव्वळ उत्प्रेक्षा आहे ग्रह आपल्या कक्षेंतच फिरतो, पण ती कक्षा कललेली असल्यानें तिचा निमा भाग पृथ्वी कक्षेच्या उत्तरेस आणि निमा दक्षिणेस असतो म्हणून ग्रह बाजूस ढकलल्यासारखा दिसतो

बुध-भार्गवयोः शीघ्रात् तद्वत् पातो यदास्थितः ॥
तच्छीघ्राकर्षणात् तौ तु विक्षिप्येते यथोक्तवत् ॥ ८ ॥

बुध आणि शुक्र हेहि भूकक्षेच्या कधीं उत्तरेस आणि कधीं दक्षिणेस ज्या दिशेस त्याचे पात असतील त्याप्रमाणें मागील श्लोकात वर्णिलेल्या योजनेनुरूप जोरानें ओढले जाऊन बाजूस फेकले जातात ८

महत्वान्मंडलस्यार्कः स्वल्पमेवापकृष्यते ॥
मण्डलाल्पतया चन्द्रस्ततो बह्वपकृष्यते ॥ ९ ॥
भौमादयोऽल्पमूर्तित्वात् शीघ्रमन्दोच्च सञ्ज्ञकैः ॥
दैवतैरपकृष्यन्ते सुदूरमति-वेगिताः ॥ १० ॥
अतो धनर्णं सुमहत् तेषां गतिवशात् भवेत् ॥
आकृष्यमाणा-स्तै रेवं व्योम्नियान्त्यनिला-हताः ॥ ११ ॥

सूर्याचें प्रकरण फारच अवाढव्य असल्यानें त्याचें बिंब फारसें ओढलें जात नाहीं पण चन्द्र हा त्या मानानें पुष्कळ हलका असल्यानें त्याच्यावर आकर्षण होऊन तो फारच ओढला जातो.९

तसेंच मंगळादि ग्रहांची बिंबें (सूर्याच्या तुलनेनें) अगदीं कमी अवजड, त्यामुळें शीघ्र, मन्दोच्च इत्यादि ज्या आकर्षण शक्ति, त्यांच्या योगानें त्या ग्रहांमध्यें अत्यन्त वेग उत्पन्न होऊन ते दूर अंतरावर (आहेत तरी) खेंचले जातात १०

म्हणूनच त्यांच्या गति पुढ़ां वर दर्शविल्याप्रमाणें धनऋण असतात, परंतु त्या गतिप्रमाणें धनऋणत्वहि महत्वाचें असतें. ह्याप्रमाणें सर्व ग्रह उच्चस्थानांच्या आकर्षणानें आणि प्रवहवायुच्या जोरानें आकाशामध्यें संचार करतात. ११

विवरणः—एका वर्तुळ परिधिचे (म्हणजे ३६० अंश परिघाचे) समसमान चार तुकडे (मध्यबिन्दूवून जाणाऱ्या व परस्पराशीं काटकोन करणाऱ्या दोन सरळ रेषांनीं) केले तर प्रत्येक परिघविभागांत ९० अंश; आणि मध्यबिन्दूत सरळ रेषांनीं बनलेला एक काटकोन, अशी आकृति बनते. ("श्री-श" हा कौंस आणि "श्रीम-शम" ह्या रेषांनीं बनलेला काटकोन अशी आकृति पाहा.) ह्या अशा मध्यबिन्दूत झालेल्या कोनासहित-परिघ विभागाला परिघकोन (Sector) असें नांव आहे. वर्तुळांत काटकोनी परिघकोन चार असतात, त्या प्रत्येकास " पद " म्हणतात. १ लें, व ३ रें हीं विषम पदें; २—४ हीं युग्मपदें होत.

कोणत्याहि पदाच्या परिघ-विभागांत बिन्दु घेऊन त्या परिघाचे कसेहि दोन तुकडे केले तर ते दोन्ही मिळोन ९० अंश किंवा एक परिघ—पद होतें. 'श्री—श' ह्या परिघ—पदांत " य " बिन्दु घेऊन तेथून य—म रेषा काढली तर एका काटकोनाचे "य—म—हे" आणि य—म—क असे दोन कोन होतील. ह्या दोन्ही कोनांचा मिळोन एक काटकोन होतो म्हणून हे दोन्ही परस्पर—**पूरक**कोन होत. [ज्या कोनांची बेरीज एका काटकोना-इतकी असते त्यांना पूरककोन म्हणतात.] 'य—हे' रेषा ' म ' कोनाची दोर्ज्या (म्हणजे भुजज्या) आहे. आणि म— रेषा ही त्याच कोनाची कोटि—ज्या आहे. य—का रेषा " य " पासून श्री—म रेषेवर लंब रेषा काढली तर 'य—का' रेषा म— ह्या कोटिज्ये बरोबर होईल. [कारण समान्तर चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजू अगदीं सारख्या असतात] परंतु य—का रेषा, का—म—य ह्या पूरक कोनाची दोर्ज्या आहे, [म्हणून नियम असा सिद्ध झाला कीं, " एका कोनाची दोर्ज्या त्याच्या पूरक कोनाच्या कोटिज्ये बरोबर; आणि कोटिज्या पूरककोनाच्या दोर्ज्ये बरोबर असते. " त्रिकोण-मितिमध्यें हा नियम फार महत्त्वाचा आहे.]

हाच नियम सिद्धान्तकारांनीं श्लोक ३० त्यांत सांगितला आहे; त्यांत, परिघ पदाचे दोन भाग केले तर त्यांतील पहिल्याला " **गत** " आणि दुसऱ्या तुकड्याला " **गम्य** " किंवा " एष्य " हें नांव देतात असें सांगितलें आहे.

सांगितलेल्या आकृतिमध्यें श्री—य—श हें पहिलें पद आणि श्री—ज—ग हें दुसरें पद आहे. पहिल्यांत य—श—हा तुकडा " गत " भाग, आणि श्री—य हा "गम्य" भाग आहे. त्यांत एकाची दोर्ज्या दुसऱ्याच्या कोटिज्ये बरोबर आहे.

दुसऱ्या श्री—ज—ग पदामध्यें 'श्री—ज' हा "गत" भाग आणि 'ज—ग' हा "गम्य" भाग आहे; ह्यांत " गत " भागाची कोटिज्या " गम्य " भागाच्या दोर्ज्ये बरोबर आहे [" गत आणि गम्य हे दोन भाग परस्पर पूरक असतात कारण दोहोंचें मिळोन एक-

काटकोनी परिघ–खण्ड होतें] (श्लोक३०). विषम (म्हणजे १-३ ह्या) परिघ–पदामध्यें " गत " भागाची (म्हणजे पहिल्या तुकड्याची) जी दोर्ज्या ती " गम्य " भागाची कोटिज्या होते [अर्थात् "गत" भागाची जी कोटिज्या ती "गम्य" भागाच्या दोर्ज्येबरोबर असते] आणि युग्म पदांमध्यें " गम्य " भागाची दोर्ज्या " गत " भागाच्या कोटिज्येशीं समान असते [अथवा " गम्य " कोटिज्या, 'गत' दोर्ज्येशीं समान असते.]

वक्राऽनुवक्रा कुटिला मन्दा मन्दतरा समा ॥
तथा शीघ्रतरा शीघ्रा ग्रहाणामष्टधा गतिः ॥ १२ ॥
तत्रातिशीघ्रा शीघ्राख्या मन्दा मन्दतरा समा ॥
ऋज्वीति पञ्चधा ज्ञेया या वक्रा सानुवक्रगा ॥ १३ ॥

ग्रहांची गति, कधीं वक्र, अनुवक्र, कुटिल, मन्द, मन्दसम आणि सम (स्थिर) अशी, आणि त्या नंतर शीघ्र आणि शीघ्रतर ह्या प्रमाणें आठ प्रकारची आहे. १२

त्यांत ग्रह जेव्हां मार्गी होतो तेव्हां त्याची गति पहिल्यानें अतिशीघ्र असते, नंतर शीघ्र, पुढें मन्द, मग मन्दतर होऊन नंतर स्थिर होते. मग तो ग्रह वक्री होतो तेव्हां त्याची गति कुटिल, वक्र, आणि अनुवक्र अशी असते. १३

स्पष्टीकरणः—ग्रहांच्या वक्रगतिचें वास्तविक कारण पृथ्वीवरून दिसणारी त्यांची सापेक्ष गति स्थिति हें होय. बुध, शुक्र हे ग्रह पृथ्वी आणि सूर्य ह्यांच्या मध्यें आहेत आणि मंगळादि ग्रह हें बाहेर आहेत, त्यामुळें, आणि पृथ्वीची गति आणि ग्रहाची गति सारखी नसल्यामुळें, ग्रह वक्री झाले असें दिसतें.

ग्रह वक्री झाला म्हणजे तो एकदम मार्गे वळतो. त्या वळणालाच कुटिल गति हें नांव दिलें आहे. नंतर तो तसाच वळण घेऊन मार्गें सरतो, ही वक्रगति; हें वळण कमी होऊन ग्रह पुनः मार्गी होण्याच्या बेतांत येतो, हें अनुवक्र; मग तो मार्गी म्हणजे पहिल्या सारखा पूर्वेकडे जाऊं लागतो. ग्रह मार्गी झाल्यावर कांहीं दिवस त्याची गति नेहमी पेक्षां फार वेगाची असते, हीच शीघ्रतर गति; नंतर ती कमी होते. पुढें सावकाश (मन्द) मग अगदीं सावकाश, आणि शेवटीं ग्रह एके ठिकाणीं थांबल्यासारखा दिसतो. ह्या स्थितिला " स्तंभ " म्हणतात. त्या नंतर तो पुनः वक्री होतो.

तत्तद् गतिवशात् नित्यं यथा दृक्तुल्यतां ग्रहाः ॥
प्रयान्ति तत्प्रवक्ष्यामि स्फुटीकरण-मादरात् ॥ १४ ॥

म्हणून आतां ग्रह आपआपल्या अनेक गतिप्रमाणें परिभ्रमण करीत असतांना, ते त्यांच्या योग्य ठिकाणींच आकाशांत दिसतील अशा प्रकारचें जें गणित असतें त्याला स्पष्ट–गणित म्हणतात. तें आतां मी मोठ्या प्रेमानें तुला सांगतों. १४

स्पष्टीकरणः—ग्रह जेथें प्रत्यक्ष आकाशांत दिसतात तेथें त्याचें स्थान ज्या गणितानें बिनचूक वर्तवितां येतें त्याला स्पष्ट गणित म्हणतात. केवळ सरासरीच्या धोरणानें

ग्रहाचें जें स्थान ठरतें त्या स्थानाला मध्यम-स्थान, आणि त्या सरासरीच्या गणिताला **मध्यम** गणित म्हणतात. नदीच्या पाण्याची खोली सरासरीच्या गणितानें जशी चुकीची येतें तसेंच ग्रहांचें मध्यम स्थानहि बहुतेक सर्ववेळां अगदीं चुकीचें असतें. तथापि मध्यम ग्रह-गणित सर्वथैव अवश्य आहे. कारण ग्रहांचें स्पष्टीकरण करताना प्रथम मध्यम गणितच करावें लागतें, म्हणून प्रत्येक ज्योतिषग्रंथांत प्रथमतः मध्यमगणितच सांगण्याचा प्रघात आहे.

ग्रह स्पष्ट करितांना त्रिकोण मितिच्या गणिताचीहि माहिती असावी लागते. " ज्या " म्हणजे "भुजज्या" तसेंच "कोटिज्या," आणि त्यांचीं वर्तुळखंडें, तसेंच त्रिज्या, व्यास ह्यांचें गुणोत्तर इत्यादि परिमाणाचा परस्पर संबंध आणि त्यापासून उद्भवणारे गणिताचे प्रकार ह्यांची उपपत्ति वाचकांस साधारण तरी माहीत आहे असें सिद्धांतकारांनीं मानिलें आहे. इंग्रजी गणितांतहि " भुजज्या " " कोटिज्या " स्पर्शज्या ह्यांची सूक्ष्म कोष्टकें केलेली असतात. त्यांचा फार उपयोग होतो. अशीच कोष्टकें गणितज्योतिष्यानें स्वतः तयार करावीं अशी सिद्धांतकारांची इच्छा दिसते. भुजज्येला Sine; कोटिज्येला Co-sine; , वर्तुळखंड किंवा कौंस अथवा धनु म्हणजे arc आणि उत्क्रमज्या म्हणजे versed sine अशा इंग्रजी संज्ञा आहेत.

राशिलिप्ताष्टमो भागः प्रथम ज्यार्धमुच्यते ॥
तत्तद् विभक्तलब्धोन-मिश्रितं तद् द्वितीयकम् ॥ १५ ॥
आद्येनैवं क्रमात् पिण्डान् भक्त्वा लब्धोन-संयुताः ॥
खण्डकाः स्युश्चतुर्विंशज्ज्यार्धपिण्डाः क्रमादमी ॥ १६ ॥

विवरणः—श्लोक १५।१६ ह्यात एका परिघ–पदाचे (म्हणजे ९० अंशाचे किंवा एका काटकोनाचे) जितके अंश–कलात्मक विभाग किंवा कोन होऊं शकतील त्या प्रत्येक विभागाची भुजज्या दोर्ज्या कशी काढावी त्याचा नियम सांगितला आहे. हा नियम फारच चातुर्यानें बसविला आहे. समपृष्ठ आणि गोलीय अशा उभयविध त्रिकोण-मितिचें चांगलें ज्ञान झाल्याशिवाय वरील नियम शोधून काढणें शक्य नाहीं. वर्तुळार्धाचे (म्हणजे स्पष्ट्या अर्ध्या परिघाचे) आणि त्रिज्येचे जर अंशात्मक, किंवा कलात्मक, अथवा विकलात्मक भाग पाडले, म्हणजे एकाच मापानें सारखे भाग केले तर वर्तुळ चतुर्थांशांत ५४०० कला बसतात; आणि म्हणून त्याच वर्तुळाच्या त्रिज्येमध्यें ३४३७''७४६७७ इतक्या कला बसतात. म्हणजे युरोपियन परिभाषेप्रमाणें ३४३७''७५ कलाचा एक Radian कोन होतो. आणि असे Radians (किंवा त्रिज्या-कोन) अर्धवर्तुळामध्यें ३·१४१६ इतके समाविष्ट होतात. म्हणून एका त्रिज्येच्या ३४३८ कला हें माप अत्यंत शास्त्रशुद्ध आहे.

त्रिज्येच्या कला (३४३८) ह्याच्या अनुरोधानें दोर्ज्या ठरविणें त्रासाचें वाटतें खरें. परतु युरोपियन पद्धतिप्रमाणें एका त्रिज्येंत एक लक्ष किंवा दहा लक्ष भाग मानल्यानें त्रास कोठें चुकतो आहे ! मुळीच चुकत नाहीं. दोर्ज्यांचीं कोष्टकें (Tables of Sines) आयतीं छापलेलीं मिळतात म्हणून त्याचें आपणास कांहींच वाटत नाहीं, परंतु

कोष्टकें करण्यास बसले म्हणजे सुख समजतें. त्यापेक्षां त्रिज्येवरून सिद्धान्त पद्धतीनें केलेलीं कोष्टकें एका तासांत तयार होतात. पण युरोपियन पद्धतीनें ह्याच्या चौपट वेळ तरी लागेलच.

विशेषत: १५°, १८°, २४°, ३६°, ७५°, ह्यांच्या दोर्ज्या युरोपियन पद्धतीनें काढणें म्हणजे √२, √३, √५, √१० ह्यांच्या किंमती माहिती असल्या पाहिजेत. वर्गमूळ 'काढण्याचा तर त्रास आहेच.' शिवाय गुणाकार भागाकार करावे लागतील ते निराळेच. 'त्यानंतर मधल्याच (म्हणजे १६°, १७°, ह्यांच्या) दोर्ज्या काढणें तर फार किचकट काम. प्रत्यक्ष करावें तेव्हां समजेल.

१५-व्या श्लोकांत दोर्ज्या साधनाचा जो नियम सिद्धान्तकारांनीं सांगितला आहे त्याची शास्त्रीय उपपत्ति फार क्लिष्ट आहे. युरोपियन गणकांसहि ती सोप्या रीतीनें उकलतां आली नाहीं. त्यांतले त्यात सोपी उपपत्ति अशी:—प्रथम अर्ध्या काटकोनाची दोर्ज्या [दोर्ज्या वर्ग+कोटिज्या वर्ग=कर्ण वर्ग ह्या सूत्राप्रमाणें] साधावी. नतर ६० अंशांची काढावयाची: समभुज त्रिकोणाचा कोणताहि कोन ६० अंशांचा असतो; म्हणून त्याच्या शिरकोणापासून तळरेषेवर लंब काढिला असतां त्याची उंची वरील सूत्राप्रमाणें √¾ असते. म्हणून ६० अंशांची दोर्ज्या √¾ च येते. नंतर ३० अशांची भुजज्या ½ इतकी होते. ह्याप्रमाणें ३०°, ४५°, ६०°, अंशांच्या भुजज्या साधल्या नंतर ३०ची निमे १५; १५ निमे ७॥ आणि ७॥ निमे ३॥। अंश, ह्याप्रमाणें पहिलें ज्या-चाप-खण्ड तयार झालें. त्याची भुजज्या साधण्याकरितां दुप्पट कोनाच्या भुज–कोटिज्येपासून निम्या कोनाची भुज–कोटिज्या साधण्याचें सूत्र आहे तें असें:—

$\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin 2A)} - \sqrt{(1-\sin 2A)}$ ह्या सूत्राप्रमाणें क्रमानें भुजज्या किंवा दोर्ज्या तयार कराव्या. वरील सूत्रानुसार ३॥।, ७॥, १५, ३०, ४५, ६०, ७५ इतक्या अंशाच्या दोर्ज्या म्हणजे भुजज्या सिद्ध झाल्यावर त्याच श्लोक ३० प्रमाणें ८६। अंश, ८२॥, ७५, ६०, ४५, ३० आणि १५ ह्या अंशाच्या कोटिज्या होतील कारण हे परस्पर पूरक कोन आहेत; मग ११। अंशांची दोर्ज्या $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ ह्या सूत्राप्रमाणें; आणि १८॥। अंशांची आणि त्या पुढील सर्व भुजज्या आणि कोटिज्या $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ ह्या समीकरणाप्रमाणें तयार होतात. ह्यावरून त्रिकोण मितिची सर्व महत्त्वाची समीकरणें सिद्धान्तकारांना उत्तम रीतीनें अवगत होतीं असें निश्चित ठरतें. टॉलेमी (Ptolemy) ह्या ग्रीक विद्वानास भुजज्या माहित नव्हत्या. अर्थात् त्यांचा उपयोग करणें तर दूरच. सिद्धान्तांतील सर्व सूत्रें एकत्र केल्यास भारतीय त्रिकोण मिति तयार होईल ह्यांत संशय नाहीं.

एका कोनाची जी भुजज्या तीच त्याच्या पूरक कोनाची कोटिज्या असते. म्हणून दोर्ज्यांचें कोष्टक तयार झालें कीं, कोटिज्यांचें आपोआपच तयार होतें.

श्लोक १५।१६ प्रमाणें पहिलें भुजज्या खंड ३॥। अंशाचें, आणि त्यानंतरचें प्रत्येक

खण्ड गतखण्डापेक्षां ३॥। अंशानीं अधिक, ह्याप्रमाणें ९० अंशाचीं २४ भुजज्या-खण्डाचीं आणि श्लोक ३० प्रमाणें कोटिज्या खण्डाची रचना झाल्यावर. अन्तरस्थ म्हणजे दोन भुजज्या खण्डामधील अंशांची भुजज्या कशी आणावी त्याची रीति श्लोक ३१ ह्यांत आहे. ती रीति त्रैराशिकाची आहे.

(१५, १६ श्लोकांचें भाषान्तर.)

(श्लो. १५) एका राशिच्या जितक्या "कला" होतात त्यांचा जो आठवा हिस्सा तो भुजज्येच्या कोष्टकांतील पहिला 'खण्ड' किंवा विभाग होय. "ज्ये"चें अर्ध म्हणजेच "ज्यार्ध" अथवा भुजज्या. [ह्याप्रमाणें पहिला विभाग ३॥। अंशांचा, दुसरा विभाग (३॥। + ३॥। = ७॥ अंशांचा;) तिसरा विभाग (३॥। + ३॥। + ३॥। =) ११। अंशांचा, चौथा १५ अंशांचा ह्या प्रमाणें ९० अंशाचे २४ विभाग करून त्या प्रत्येक विभागाची "ज्या" म्हणजे भुजज्या काढलेली असते.] अर्थात पहिल्या ३॥। अंशांच्या विभागाची "ज्या" ($\frac{१८००}{८}$ =) २२५ कला इतकी असते. दुसऱ्या विभागाची "ज्या" काढावयाची म्हणजे पहिल्या "भुजज्या" खण्डाला २२५ नीं भागून जो भागाकार येईल तो पहिल्या खण्डातून उणा केला असतां जी बाकी राहते तितक्या कला, हें पहिल्या आणि दुसऱ्या भुजज्या खण्डातील अन्तर असतें; म्हणून तें अन्तर पहिल्या ज्याखण्डात मिळविलें म्हणजे दुसरें "ज्याखण्ड" तयार होतें. १५

(श्लोक १६) जितक्या अंश कलांची भुजज्या पाहिजे असेल त्यांच्या कला राशीला २२५ कलांनीं भागावें–भागाकार येईल तितकीं (अंश) खण्डें "**गत**" समजावीं; नंतर इष्ट कला राशीतून "गत" खण्डाच्या कला वजा करून अन्तर आणावें (हें गतान्तर होय). किंवा "गम्य" म्हणजे पुढील अंश खण्डाच्या कलांतून इष्ट कला राशि वजा करून अन्तर आणावें हें गम्यान्तर होय). नंतर "गत"–किंवा "गम्य" ह्यांच्या अंतरानें भुजज्या खं. अंतराला गुणून २२५ कलांनीं भागावें म्हणजे इष्ट भुजज्यान्तर येईल.

स्पष्टीकरणः—२२५ अन्तराला: भुजज्यान्तरः : इष्ट अन्तराला किती ? ह्याप्रमाणें हें सारें त्रैराशिक आहे.

नंतर गतांतराचें त्रैराशिक असेल तर उत्तर–कला गत–खण्डाच्या भुजज्येत मिळवाव्या म्हणजे इष्ट अंश कलांची भुजज्या येते. ह्याप्रमाणें भुजज्यानयन पद्धति सांगितली. आतां उत्क्रमज्या सांगतों:—

(श्लोकार्ध २२) त्रिज्येतून (म्हणजे ३४३८) ह्यांतून इष्ट अंशांची कोटिज्या वजा केली म्हणजे बाकी राहील ती उत्क्रमज्या होते. ह्याप्रमाणें भुजज्या, कोटिज्या, आणि उत्क्रमज्या ह्यांची रीति सांगितली.

स्पष्टीकरणः—उत्क्रमज्येला इंग्रजींत (versed sine) म्हणतात; भुजज्या (sine) कोटिज्या (Co-sine) ह्यांची पद्धतशीर सूक्ष्म कोष्टकें तयार करून ठेवावीं. आपल्या सिद्धान्तामध्यें "स्पर्शरेषा" हें परिमाण स्वतंत्र असें स्वीकारलेलें नाहीं. भुजज्येला कोटिज्येनें भागिलें असतां भागाकार येतो ती **स्पर्शरेषा** होते. स्पर्शरेषेला इंग्लिशमध्यें Tangent

म्हणतात, आणि कोटिज्या ÷ भुजज्या ह्या उलट परिमाणाला "को. स्पर्श" Co-tangent म्हणतात. भुजज्या, कोटिज्या, आणि स्पर्शरेशा ह्या तीन परिमाणांचींच कोष्टकें फार अवश्य म्हणून त्यांची रचना कशी करावी तें १५, १६, ३०, ३१ ह्या श्लोकांत सांगितलें आहे.

(श्लोक १६) ह्या प्रमाणें पहिलें ज्यार्ध २२५′ (कला) ह्यांनीं गत-ज्यार्ध-कलांना भागून जो भागाकार येईल, तो त्या गत-ज्यार्धांच्या अन्तरांत वजा करून जी बाकी राहील ती गत ज्यार्धकलांमध्यें मिळवावी म्हणजे त्या पुढील ज्यार्ध निष्पन्न होतें.

स्पष्टीकरणः—ह्याची सयुक्तिक उपपत्ति पाश्चात्य ग्रंथकार देत नाहींत. त्यांनी उडवा उडवीच केली आहे. वरील श्लोकांतील नियमांची उपपत्ति आम्हीं वर दिलीच आहे, परंतु १५।१६ श्लोकांतील नियम इंग्लिश पद्धतिप्रमाणें मांडला पाहिजे तो असाः—

$$\text{Sin}\,(\,n+1\cdot225\,) - \text{Sin}\,(\,n\cdot225\,) = \sin\,(\,n\cdot225) - \sin\,(\,n-1\cdot225) - \sin\frac{n\cdot225}{225}$$

म्हणून रीति अशी बसली कीः—

कोणत्याही दोन लगतच्या भुजज्या खण्डातील अन्तरानें, त्यापैकीं दुसऱ्या भुजज्येला भागावें, आणि जो भागाकार येईल तितक्या कला पूर्वीच्या अन्तरातून वजा कराव्या म्हणजे दुसऱ्या भुजज्येच्या पुढील (तिसऱ्या) भुजज्येचें अन्तर सिद्ध झालें. हें त्या दुसऱ्या भुजज्येंत मिळविलें म्हणजे पुढील तिसरी भुजज्या तयार झाली. हाच क्रम शेवटपर्यंत आहे.

उदाहरणार्थः—शून्यांश भुजज्या ० आणि पहिलें खण्ड २२५′ ह्या लगतच्या दोन भुजज्यांचें अन्तर २२५′ कला आहे. म्हणून २२५′ ÷ २२५ भा कार १′; २२५′ – १′ = २२४′ हें अन्तर; म्हणून २२५+२२४= ४४९′ ही दुसऱ्या विभागाची म्हणजे ७॥ अंशाची भुजज्या झाली. पुनः ४४९′ ÷ २२४ (मागील अंतर) = २ भागाकार आणि २२४ – २′ = २२२ हें नवीन अंतर म्हणून २२२ + ४४९′ = ६७१′ कला हें तिसरें खण्ड. पुनः ६७१ ÷ २२२ = ३′; २२२–३ = २१९ हें अंतर + ६७१′ = ८९०′ ह्याप्रमाणें २४ खण्डांच्या भुजज्या तयार कराव्या.

स्पष्टीकरणः—कोणत्याही काटकोनाचे टोंक मध्यकल्पून एक वर्तुळ काढलें असतां त्या वर्तुळाचा ¼ तुकडा त्या काटकोनांत समाविष्ट होईल. ह्या चतुर्थांश–परिघांत कोठेंहि एक बिन्दू घेऊन तो बिन्दू आणि काटकोनबिन्दू हे सरळ सरळ रेषेनें जोडावें आणि तेथून काटकोन रेषांवर लंब काढावे म्हणजे भुजज्या, कोटिज्या कोणत्या तें समजेल.

* तत्वाश्विनोङ्का-ब्धिकृता, रूपभूमिधरर्तवः ॥
खाङ्काष्टौ पञ्चशून्येशो बाणरूपगुणेन्दवः ॥ १७ ॥

---

* ह्याचें कोष्टक पुढें दिलें आहे.

शून्यलोचनपञ्चैकाच्छिद्ररूपमुनीन्दवः ॥
वियच्चन्द्राति-धृतयो गुणरन्ध्राम्बराश्विनः ॥ १८ ॥
मुनिषड्यमनेत्राणि चन्द्राग्नि-कृतदस्रकाः ॥
पञ्चाष्ट-विषयाक्षीणि कुञ्जराश्वि-नगाश्विनः ॥ १९ ॥
रन्ध्रपञ्चाष्टकयमा वस्वद्र्यङ्क-यमास्तथा ॥
कृताष्टशून्यज्वलना नगाद्रिशशिवह्नयः ॥ २० ॥
षट्पञ्चलोचनगुणाश्चन्द्रनेत्राग्निवह्नयः ॥
यमाद्रिवह्निज्वलना रन्ध्रशून्यार्णवाग्नयः ॥ २१ ॥
रूपाग्निसागरगुणावस्वग्निकृतवह्नयः ॥
प्रोज्झ्योत्क्रमेणव्यासार्धादुत्क्रमज्यार्धपिण्डकाः ॥ २२ ॥
मुनयो रन्ध्रयमला रसषट्कामुनीश्वराः ॥
द्व्यष्टैका रूपषड्दस्राः सागरार्थहुताशनाः ॥ २३ ॥
खर्तुवेदा नवाद्र्यर्था दिङ्नगास्त्र्यर्थकुञ्जराः ॥
नगाम्बरवियच्चन्द्रा रूपभूधरशङ्कराः ॥ २४ ॥
शरार्णव-हुताशैका भुजङ्गाक्षिशरेन्दवः ॥
नवरूपमहीध्रैका गजैकाङ्कनिशाकराः ॥ २५ ॥
गुणाश्विरूपनेत्राणि पावकाग्निगुणाश्विनः ॥
वस्वर्णवार्थयमलास्तुरङ्गर्तुनगाश्विनः ॥ २६ ॥
नवाष्टनवनेत्राणि पावकैकयमाग्नयः ॥
गजाग्निसागरगुणा उत्क्रमज्यार्धपिण्डकाः ॥ २७ ॥
गताभ्दुलज्या विषमे गम्यात्कोटिः पदे भवेत् ॥
युग्मेतुगम्याद्बाहुज्यात्कोटिज्यातुगताद्भवेत् ॥ ३० ॥
+ लिप्तास्तत्त्वयमैर्भक्तालब्धंज्यापिण्डकंगतम् ॥
गतगम्यान्तराभ्यस्तं विभजेत्तत्त्वलोचनैः ॥ ३१ ॥
तदवाप्तफलंयोज्यंज्यापिण्डेगतसञ्ज्ञके ॥
स्यात्क्रमज्याविधिरयमुत्क्रमज्यास्वपिस्मृत ॥ ३२ ॥

+ ह्याचें भाषान्तर विषयानुरोधानें पृष्ठ ४० मध्यें श्लोक १५ ह्याच्या भाषान्तरापुढें आलें आहे त्यात ज्या खण्डान्तरित भुजज्या काढण्याची रीति दिली आहे तीच उत्क्रज्ये-सहि लागू आहे.

पूर्वी अंशादि चापा (arc) पासून अथवा धनुपासून दोर्ज्या (sine) कशी काढावी हें सांगितलें आतां दोर्ज्येपासून त्या दोर्ज्येचें धनु (arc) कसें काढावें हें सांगतात. ती पद्धति साध्या त्रैराशिकाचीच आहे.

ज्यां प्रोज्झ्यशेषंतत्त्वाश्विहतंतद्विवरोद्धृतम् ॥
सङ्ख्यातत्त्वाश्विसंवर्गे संयोज्य धनुरुच्यते ॥ ३३ ॥

जी दोर्ज्या दिली असेल तिच्यामध्यें जितकीं ज्या–खण्डें वजा जात असतील तितकीं करावीं [म्हणजे दोर्ज्या खण्डाचें कोष्टक पाहून इष्ट दौर्ज्येपेक्षा कमी दोर्ज्या कोणती आणि जास्त कोणती तें पाहून तीं चापें माडून ठेवावीं] नंतर कमी दोर्ज्या (१) इष्ट दोर्ज्येतून वजा करून किंवा इष्ट दोर्ज्या अधिक (२) दोर्ज्येतून वजा करून बाकी राहील तिला २२५′ ह्या चाप खण्डानें गुणावें आणि (कमी आणि जास्त) दोर्ज्या-खण्डातील अन्तरानें भागावें, त्याचें उत्तर कलादि येईल, तें इष्ट दोर्ज्या अधिक असल्यास कमी असलेल्या चाप खण्डांत मिळवावें (उलट पक्षीं) पुढील चाप खण्डातून वजा करावें म्हणजे इष्ट धनु येईल.

स्पष्टीकरणः—प्रत्येक चाप–खण्ड २२५′ कलाचें मानल्यानें दोन दोर्ज्या खण्डांतील अन्तराला जर २२५′ चाप खण्ड तर इच्छित अन्तराला किती ? ह्याप्रमाणें त्रैराशिक माडल्यावर

इच्छित दोर्ज्यान्तर × २२५ – दोर्ज्या खण्डातील अन्तर

अशी रीति निष्पन्न झाली

पूर्वी श्लोक २७ चें भाषान्तर दिलें व त्यानंतर २८।२९ हे श्लोक तेथें संदर्भ एकदम बदलतो म्हणून सोडून त्रिकोणांचा विषय साधारणत पुरा केला तेव्हां आतां श्लोक २८।२९ हे घेऊ २८ श्लोकांमध्यें सूर्याची क्रान्ति इच्छित दिवसाची कशी ठरवावी तें सांगतात –

परमापक्रमज्या तु सप्तरन्ध्रगुणेन्दवः ॥
तद्गुणा ज्या त्रिजीवाप्ता तच्चापं क्रान्तिरुच्यते ॥ २८ ॥
ग्रहं संशोध्यमन्दोच्चात्तथाशीघ्राद्विशोध्यच ॥
शेषंकेन्द्रपदं तस्मात् भुजज्या कोटिरेवच ॥ २९ ॥

सूर्याची परमक्रान्ति (ह्य० ज्यास्तीत ज्यास्त क्रान्ति) २४ अंश असल्यानें तिची दोर्ज्या १३९७ कला होते. म्हणून रविभोगाच्या दोर्ज्येला परमक्रान्तिज्येनें (१३९७ कलानीं) गुणून त्रिज्येनें भागावें म्हणजे इष्टक्रान्तिची दोर्ज्या येईल, तिचें धनु (चाप) करावें तीच इष्ट क्रान्ति होते.

स्पष्टीकरणः—आकाशातील विषुववृत्तापासून दक्षिणेकडे किंवा उत्तरेकडे स्पष्ट सूर्यापर्यंतचें जें लम्बचापात्मक अन्तर ती क्रान्ति सूर्य हा वर्षातील दोन दिवस खेरीज करून बाकीचे ३६३ दिवस विषुववृत्ताच्या उत्तरेस सहा महिने, आणि नंतर दक्षिणेस सहा महिने ह्याप्रमाणें असतो (मार्च २०।२१ आणि सप्टंबर २२।२३ ह्या दिवसाचे सुमारास मात्र एकेकच दिवस तो विषुववृत्तावर येतो म्हणून त्या दिवशीं मात्र क्रान्तिशून्य होते नंतर तो उत्तरेस किंवा दक्षिणेस गेला म्हणजे सूर्यापासून विषुवापर्यंत चापरूपानें लम्ब काढावा. ह्या लम्बा-

च्या अनुरोधानें विषुवापासून सूर्यापर्यंतचें जे अंशात्मक अन्तर: तीच स्पष्टक्रान्ति ता.२२जून आणि २२डिसें.चे सुमारास सूर्य ज्यास्तीतज्यास्त उत्तरेस किंवा दक्षिणेस असतो हिला परम क्रान्ति म्हणतात. प्राचीन काळीं परम क्रान्ति जवळ जवळ २४° अंश होती. हल्लीं फक्त २३ अंश २७′ कला आहे. म्हणून परम क्रान्ति आतां तितकीच मानली पाहिजे. ह्या श्लोकांतहि इष्ट क्रान्ति-साधनासाठीं त्रैराशिकाचाच उपयोग केला आहे तो असा:—त्रिज्येइतक्या अंतरास : जर परम क्रान्तिची दोर्ज्या : : तर इष्ट अंशांना किती? त्यामुळें, परम क्रान्तिज्या × इष्ट भोग—दोर्ज्या ÷ त्रिज्या अशी उपपत्ति सिद्ध झाली.

आतां मध्यम ग्रहापासून स्पष्ट ग्रह करण्याची पद्धति सांगतात; त्याला स्पष्ट ग्रह साधन म्हणतात, त्याकरितां कांहीं प्रास्ताविक माहिती सांगणें अवश्य आहे.. वस्तुतः पृथ्वी सूर्याभोंवती फिरत असतांहि ज्याप्रमाणें सूर्यच पृथ्वी भोंवतीं फिरतो असें आपण सोईकरितां समजतों व प्रत्यक्ष भासहि तसाच होतो; त्याप्रमाणें बुध, शुक्र हे पृथ्वी व सूर्य ह्यांच्यामध्यें असणारे (म्हणून अन्तवर्ती) ग्रह; आणि मंगळ, गुरू, शनि, युरेनस (हर्शल) नेपच्यून इत्यादि बहिर्वर्ती ग्रह हे सुद्धां वास्तविक सूर्याभोंवती फिरतात, असें असूनहि ते आपल्या पृथ्वीभोंवतींच फिरत आहेत असा आपल्यास भास होतो. म्हणून आपल्या इकडे आणि त्याचप्रमाणें आधुनिक पाश्चात्य पद्धतींतहि ह्या सूर्यानुवर्ती ग्रहांची दोन स्थानें सांगण्याचा प्रघात आहे. पहिलें रविमध्यानुवर्ती (Heliocentric) म्हणजे सूर्यावरून पाहाणारास जेथें ग्रह दिसेल तें स्थान; आणि दुसरें पृथ्वीवरून जेथें ग्रह प्रत्यक्ष दिसेल तेंच स्थान. ह्याला ग्रहाचें भूमध्यानुवर्ती (Geocentric) किंवा स्पष्ट स्थान म्हणतात. म्हणून ग्रह स्पष्टीकरणाचें गणित दोन प्रकारचें असतें. रविमध्यानुवर्ती स्थानाला आपल्या प्राचीन ग्रंथांत मन्द—स्पष्ट—स्थान म्हटलें आहे. मन्द—स्पष्ट म्हणजे रवि मध्यस्थान. दुसऱ्या प्रकारच्या गणिताला स्पष्ट ग्रहगणित म्हणतात. अर्थात् आपल्या ग्रंथकारांनीं ग्रहाच्या फिरण्याच्या मार्गाला रविमध्य, आणि भूमध्य गणिताची जी पुस्ती जोडली आहे तिचें स्पष्टीकरण करूं. ही पुस्ती पाश्चात्य गणितांतहि आहेच. फरक इतकाच कीं, आपले ग्रंथकार ग्रहकक्षा वर्तुलाकार मानतात, आणि पाश्चात्य दीर्घवर्तुलाकार मानतात. तथापि फलामध्यें अगदींच थोडा फरक आहे. ह्याचें मुख्य कारण आधुनिक वेधाप्रमाणें परम रवि मन्दफल १° ५५′ आहे तें आपल्या ग्रंथांत २° १०′ म्हणजे सुमारें १५′ कलांनीं ज्यास्त मानलें आहे; प्राचीन ग्रंथांत सांगितलेल्या इतकें तें पूर्वी होतें हें मात्र खरें. त्यामुळें सिद्धान्तकारांना दोष देणें योग्य नाहीं व शक्यहि नाहीं. १° ५५′ अंश किंवा प्राचीन मताप्रमाणें २° १०′ ह्याला परम मन्दफल म्हणतात. हें चापात्मक आहे म्हणून ह्याला दोर्ज्या (Sine) असावयाचीच.

सर्व ग्रह सूर्याभोवतीं फिरतात, परंतु सूर्यच पृथ्वीभोंवतीं फिरतो असें क्षणभर मानलें पाहिजे. सूर्याची नक्षत्र प्रदक्षिणा ३६५ दिवस १५ घटि २३ पळें इतक्या काळांत पूर्ण होते. असें जरी आपण म्हटलें, तरी कोणत्याहि पद्धतीचें पंचांग पाहिलें असतां अश्विन्या-रंभापासून रेवत्यंतापर्यंतची रवि प्रदक्षिणा इतक्याच अवधिमध्यें पूर्ण होतें असें मात्र

नाहीं. कारण ज्योतिषशास्त्रांत प्रत्यक्ष-वेधानुरोधाअन्वयें आधारलेल्या नियमानें जेवढी निश्चितता येते तेवढीच खरी. तुमच्या मध्यम मानाला प्रत्यक्ष सूर्य नेहमीं विचारीलच असें नाहीं. मध्यम मान हें गणिताला आवश्यक आहे, अशाच दृष्टीनें मानावयाचें; मध्यममानाला दृक्प्रत्यय नाहीं. कारण मध्यममान म्हणजे शेंपन्नास वर्षांच्या **प्रत्यक्ष अनुभवाची सरासरी** आहे.

प्रत्येक ग्रहाच्या नाक्षत्रप्रदक्षिणेचा काल मध्यम मानानें जो निश्चित केलेला आहे, त्यालाच **प्रदक्षिणा काल** (Periodic Time) म्हणतात; त्या प्रदक्षिणा कालाला अनुसरून इष्ट दिवसाच्या इष्ट वेळेचा मध्यम ग्रह त्रैराशिकानें काढला तर त्याचें जें मध्यम मानाचें स्थान असेल तेथें तो आकाशांत **दिसेलच** असें मात्र नाहीं. कारण मध्यम मान हें **सरासरीचें मान आहे. गणिताचें नव्हें.** दररोज किंवा शक्य तितक्या वरचेवर ग्रहाचा वेध घेऊन त्याचें प्रत्यक्ष स्थान आणि वेधाचा समय असें टांचण अनेक ज्योतिषी ठेवतात. आणि खऱ्या ज्योतिषप्रेमी विद्वानानें तें ठेविलें पाहिजे. मध्यम ग्रहाची दैनिक गति ही **सरासरीनेंच ठरली** असल्यानें नेहमीं कायम असते. परंतु स्पष्ट म्हणजे प्रत्यक्ष ग्रहाची गति कांहीं दिवस (किंवा महिनें) सतत वाढती, आणि कांहीं दिवस (किंवा महिनें) सतत घटती ,अशी असल्यानें प्रतिदिवशीं भिन्न असते. कांहीं थोडें दिवस तर तिच्यांत अगदीं अल्प वाढ किंवा घट होत असते. ह्यामुळें निरीक्षण करणाऱ्या ज्योतिष्यांच्या प्रत्यक्ष अनुभवाच्या टांचणावरून प्रत्येक ग्रहाची अत्यंत मन्द गति आणि अत्यंत शीघ्र गति ह्यांच्यामुळें, **मध्यम गतिनें** आणि प्रत्यक्ष गतिनें येणाऱ्या त्यांच्या स्थानांत **ज्यास्तीत ज्यास्त** फरक **किती अंश-कला** पडतो त्याचा आंकडा निश्चित झाला आहे. **ह्या** आंकडा **रवि मध्य** मानून सिद्ध केला म्हणजे त्याला **परम मन्दफल म्हणतात,** आणि **भूमध्य** मानून तसा दुसरा एक आकडा सिद्ध केला म्हणजे त्याला परम **शीघ्र फल म्हणतात.**

ह्या दोन्ही फलाचे आकडे भिन्न आहेत; आणि त्या फलांचें **कार्यहि भिन्न आहे,** मात्र आंकडे सिद्ध करण्याची रीति जवळजवळ एकच. **परम मन्द फल,** आणि परम **शीघ्र फल** ह्यांचे आंकडे पुढें ३४।३५।३६।३७ ह्या श्लोकात सांगितलें आहेत. चंद्र हा पृथ्वी-भोंवतीं आणि पृथ्वी ही रवि भोंवतीं फिरत असल्यानें चन्द्र आणि रवि ह्यांच्या स्पष्टी-करणाला शीघ्र फलाची जरूर नाहीं. कारण तेथें रवि मध्य, भूमध्य असा भेद नाहीं. परम मंदफल आणि शीघ्रफल ह्यांचे अंश चाप-(Arc)-रूप असल्यानें त्यांची दोर्ज्या करून तिला अनुसरून सिद्धांतकारांनीं गणितासाठीं मंद फलावरून येणारें वर्तुळ आणि दुसरें शीघ्र फलावरून येणारें वर्तुळ अशी दोन वर्तुळें कल्पिलीं, आणि त्यांना **मन्दपरिधि,** आणि **शीघ्रपरिधि** अशीं नावें दिलीं. मन्द फल पद्धतिच्या गणितांत व तसेंच " शीघ्र " फल गणितांतहि दोन बिन्दूस्थानें उद्भवतात. त्यांना अनुक्रमें **मन्दोच्च** आणि शीघ्रोच्च म्हणतात.

परंतु वास्तविक दृक् प्रत्ययास येणारीं आणि वेधामध्यें प्रत्यक्ष अनुभवास येणारीं उच्चें मन्द फल पद्धतींतच आहेत. त्याना इंग्रजीमध्यें Aphelion, व Perihelion, किंवा Apogee, आणि Perigee अशीं नांवें आहेत. मन्दोच्चाच्या स्थानीं मंदफल शून्य असतें म्हणून मन्द फल व शीघ्र फल ही ज्याप्रमाणें कमी ज्यास्त असतील त्याप्रमाणें त्यावरून येणारे परिधिहि कमज्यास्त येतील त्यांसच **स्फुट परिधि** म्हणतात.

ह्याप्रमाणें मध्यम प्रदक्षिणा काल, मध्यम ग्रह, स्पष्ट ग्रह, मन्द–फल, परम–मन्द–फल, शीघ्र–फल, मन्द परिधि, शीघ्र परिधि, आणि स्फुट–परिधि ह्या संज्ञाच्या अर्थाचें सामान्यतः स्पष्टीकरण झालें.

(श्लोक २९) मंगल, गुरु, शनि हे मध्यम ग्रह मन्दोच्चाच्या अंशातून वजा करावे, आणि बुध, शुक्र हे शीघ्रोच्चाच्या अंशातून वजा करावे. म्हणजे जी बाकी राहील तिला **केन्द्र** ही संज्ञा प्राप्त होते. मन्द केन्द्राची दोर्ज्या (Sine) आणि तशीच कोटिज्या (Co-Sine) ही काढून ठेवावी.

स्पष्टीकरणः–मागें श्लोक १५।१६ ह्याचें स्पष्टीकरण केलें तेव्हां सांगितलेंच आहे कीं, वर्तुळाचे व्यास–रेषांनीं समान चार भाग केले असता वर्तुळाच्या प्रत्येक चतुर्थांश परिघामध्यें ९० अंश असतात आणि त्याच्या सीमारूप त्रिज्याच्या रेषामुळें वर्तुळ मध्याच्या ठिकाणीं काटकोन होतो; ह्या परिघ चतुर्थांशाला **काटकोन-परिघांश** म्हणतात. किंवा इंग्रजीमध्यें Quadrant असें म्हणतात. प्राचीन सिद्धांतांत ह्याना " **पद** " असें नांव आहे.

कोणत्याहि कोनाची दोर्ज्या त्याच्या पूरक कोनाच्या कोटिज्येशीं समान असते. त्यामुळें- (**श्लोक ३०**) पहिल्या पदातील (ह्म० Quadrant मधील) परिघांशाची जी दोर्ज्या तिचेंच जें **चाप** त्याला " **भुज** " असें नांव आहे.

[म्हणून वर्तुळ विभाग किंवा चाप याचे अंश ९०पेक्षां कमी असल्यास तोच भुज होतो हा नियम ठरला. हा नियमहि फार महत्त्वाचा आहे]

दुसऱ्या पदामध्यें (म्ह० Quadrant मध्यें) परिघविभाग अर्थातच (पहिला विभाग धरून) ९० अंशापेक्षां जास्त असतो. त्यामुळें त्याची दोर्ज्या, आणि १८०–परिघ-विभाग ह्यांची (वजावाट होऊन जो परिघभाग **गम्य** म्हणजे शिल्लक राहतो त्याची) दोर्ज्या ह्या अगदीं सारख्या असतात. ह्यामुळें दुसरा नियम असा ठरला कीं, द्वितीय पदांमध्यें १८० उणे गतविभाग=गम्य (शिल्लक) भाग तोच **भुज**, आणि त्याची भुजज्या ती दोर्ज्या. आतां तिसऱ्या पदामध्यें (Quadrant मध्यें) दोर्ज्या "गत" भागापासून साधावयाची; म्हणून इष्ट परिघातून १८० वजा करून "भुज" सिद्ध करितात. आणि चौथ्या पदांमध्यें (Quadrant मध्यें) पुनः दुसऱ्या पदाप्रमाणें **गम्य** (३६०–परिघांश) हा भुज "भुज" होतो.

कोटिज्येचा प्रकार ह्याच्या उलट आहे. तेथें १ लें, व ३ रें ह्या पदामध्यें गम्य म्हणजे शिल्लक जो भाग (अर्थात् ९०–परिघांश किंवा परिघांश-१८०) त्या पासून

कोटिज्या आणतात. आणि २ रें व ४ थें ह्यात **गत** म्हणजे प्रत्यक्ष परिधाशाचा जो भाग त्यापासून कोटिज्या आणतात.

श्लोक ३४-३७ आतां मन्दफल आणण्यासाठीं मन्दपरिधि सागतात.

रवेर्मन्दपरिध्यंशा मनवः शीतगो रदाः ॥
युग्मान्ते विषमान्तेच नखलिप्तोनितास्तयोः ॥ ३४ ॥

सम अथवा युग्मपदामध्यें रविचे परिधाश १४; व चन्द्राचे ३२; आणि विषमपदामध्यें रविचे १३° ४०′ इतके आणि चद्राचें ३१° ४०′.

स्पष्टीकरणः—परम मन्दफल हे वर लिहिल्याप्रमाणें वेधानें ठरविलेलें असतें त्यामुळें निरनिराळ्या आचार्यांच्या ग्रथात मन्दपरिध्यंशात केव्हां केव्हां थोडा फरक आढळतो. **परम मन्दफलांच्या किंवा परम शीघ्रफलाच्या दोर्ज्येस अन्त्यफलज्या म्हणतात.**

रविचा किंवा चन्द्राचा केन्द्रभोग ९० अश झाला म्हणजे त्या **सुमारास** त्यांचें मन्दफल अत्यतिक म्हणजे परममन्द–फलाइतकें होतें. अन्त्यफलज्येस ३६० नें गुणून त्रिज्येनें भागिलें म्हणजे **परिध्यंश** निष्पन्न होतात.

युग्मान्तेऽर्थाद्रयः खाग्नीसुराः सूर्यानवार्णवाः ॥
ओजे व्यगावसुयमारदारुद्रा गजाब्धयः ॥ ३५ ॥

समपदान्तीं बुध, शुक्र ह्यांचें मन्दपरिध्यश अनुक्रमें ३०, आणि १२ अश, आणि विषमपदान्तीं २८ आणि ११ आहेत. त्याच प्रमाणें मगळ, गुरू व शनि यांचें परिध्यंश समपदान्तीं ७५, ३३, आणि ४९; आणि विषमपदान्ती ७२, ३२ आणि ४८ असे आहेत.

आतां शीघ्रपरिध्यश सांगतात.

कुजादीनामतः शैघ्र्यायुग्मान्तेऽर्थाग्निदस्रकाः ॥
गुणाग्निचन्द्राः खनगाद्रिरसाक्षीणिगोऽग्नयः ॥ ३६ ॥
ओजान्ते द्वित्रियमला द्विविश्वे यमपर्वताः ॥
खर्तुदस्रा वियद्वेदाः शीघ्रकर्मणि कीर्तिताः ॥ ३७ ॥

बुधादि पंच ग्रहांचें शीघ्रपरिध्यश समपदान्तीं बुध १३३, शुक्र २६२, (मंगळ) २३५, गुरू ७०, शनि ३९, ह्याप्रमाणें आणि विषमपदान्ती अनुक्रमें बु. १३२, शु. २६०, मंगळ २३२, गु. ७२ आणि शनि ४० ह्याप्रमाणें परिध्यश आहेत.

स्पष्टीकरण.—हे परिध्यश त्रिज्ये इतक्या केन्द्र–भोगाचे आहेत. ग्रहाच्या केन्द्राचा भोग त्या पेक्षा कमी असल्यास त्रैराशिकानें इष्ट भोगाचे परिध्यश आणले पाहिजेत.

आतां विषम आणि सम पदातील परिध्यंशांत जी भिन्नता आहे ती काढून टाकण्याची म्हणजे परिध्यंश स्फुट करण्याची रीति सांगतात:—

ओजयुग्मान्तरगुणा भुजज्या त्रिज्ययोध्दृता : ॥
युग्मवृत्ते धनर्णस्यादोजादूनाधिके स्फुटम् ॥ ३८ ॥

श्लोक ३८ इष्ट केंद्रांशांच्या भुजज्येला दोन्ही प्रकारच्या परिध्यंशांच्या अंतरानें गुणावें *आणि त्रिज्येनें भागावें. भागाकाराचें रूपानें जें फल (ज्याला लब्धि म्हणतात तें) येईल त्याचा* परिध्यंशांना संस्कार करावा; म्हणजे विषमापेक्षां समपरिध्यंश कमी असतील तर तो कमी बाजूंत (समपरिधींत) मिळवावा, आणि विषम परिधि जर कमी असेल तर ज्यास्त बाजूंतून (म्हणजे समपरिध्यंशांतूनच) वजा करावा.

स्पष्टीकरणः—ह्यांत तत्व हें आहे की जो परिधि ज्यास्त असेल तो प्रमाणानें कमी करावयाचा, अथवा कमी असेल तो प्रमाणानेंच ज्यास्त करून समता आणावयाची. परंतु हें करण्याची रीति त्रैराशिकाचीच आहे, ती अशीः—.

त्रिज्येस : जसें अमुक परिध्यंतर :: तसें इष्ट केंद्रज्येस किती : येईल तें फल.
म्हणून परिध्यंशान्तर × केंद्रज्या ÷ त्रिज्या. ही रीति निष्पन्न झाली.

ज्यास्तींत ज्यास्ती जें **मन्दफल** किंवा **शीघ्रफल** त्याच्या अंशांची जी दोर्ज्या तिला **अन्त्य फलज्या** म्हणतात हें वर सांगितलेंच आहे. आपल्या सिद्धान्तामध्यें ग्रहकक्षा वर्तुळाकार मानल्या आहेत. परंतु स्वकक्षेमध्येंहि ग्रहाची **गति सर्वदा सारखी नसते.** *ह्या सिद्धान्त आपल्या शास्त्रज्ञांनीं स्वीकारल्या कारणानें कक्षा दीर्घवर्तुळाकार मानल्या प्रमा*-णेंच झालें. आधुनिक पाश्चात्य ज्योतिष्यानी ग्रहकक्षा दीर्घवर्तुळाकार ठरविल्यामुळें त्यांना ग्रहगति कमीज्यास्त मानणें **प्राप्तच** झालें. आमच्या सिद्धान्तकारांनीं ग्रहगतिच मुळांत कमज्यास्त मानल्या त्यामुळें उभयताच्या फलात **तत्त्वतः** भिन्नता उरली नाहीं. किंचित् जी भिन्नता आहे तिचें, सिद्धान्तिक मन्दफलें आणि आधुनिक मन्दफलें ह्यांतच थोडा फरक आहे हें एक कारण, आणि दुसरें कारण आधुनिक **गणितांतील क्रमसन्निकर्ष** पद्धति हें होय.

आतां मन्दफल काढावयाचें तें असेंः—

तद्गुणेभुजकोटिज्येभगणांशविभाजिते ॥
तग्दुजज्याफलधनुर्मान्दंलिप्तादिकंफलम् ॥ ३९ ॥

केंद्राची भुजज्या आणि कोटिज्या ह्यांना स्फुटपरिध्यंशांनीं अनुक्रमानें गुणावें आणि प्रत्येक गुणाकारास ३६० अंशांनीं भागावें म्हणजे भुजज्येपासून **भुजफल** आणि कोटिज्येपासून कोटि-फल निघते. त्यापैकीं भुजफलासच **मन्दफल** म्हणतात.

स्पष्टीकरणः—३६०° : जसें स्फुटपरिध्यंशांना :: तसें केंद्रज्येला : भुजफल म्हणून स्पपरिध्यंश × केंद्रभुजज्या ÷ ३६० = भुजफल हें उत्तर आलें. परम-फलज्या म्हणजे अन्त्यफलज्या आणि त्रिज्या ह्यांचा जो संबंध तोच इष्टपरिधि आणि ३६०

अंश ह्याचा असल्यानें स्फुटपरिधिच्या ठिकाणी अन्त्यफलज्या आणि ३६० च्या जागीं त्रिज्या लिहिली तरी परिणाम एकच होतो म्हणून

$$\frac{\text{अन्त्यफलज्या} \times \text{इष्टकेंद्रभुजज्या}}{\text{त्रिज्या}} = \text{मन्दफल.}$$

ही सारणि मन्दफलाची सिद्ध झाली. मंदफलाला इंग्रजींत-इक्वेशन ऑफ दि सेण्टर (Equation of the Centre) म्हणतात.

ग्रहाची मन्दगति किंवा त्वरितगति ही त्याचें उच्चापासून जितकें अन्तर असेल त्या अन्तरावर अवलंबून असतें, ह्या अन्तरासच केन्द्र हें नांव आहे. रवि–मध्य स्पष्टीकरणांत फक्त मन्द केन्द्राचीच आवश्यकता असते. हें अंतर अथवा मन्द केन्द्र (M. Anomaly) त्रिज्येइतकें (तीन राशी) झालें म्हणजे ग्रहाच्या **मन्दफलाची** परमावधि होते. परंतु त्याच वेळीं ग्रहाची गति अतिशय त्वरित असते **असें मात्र नव्हे.** परमोच्च स्थानीं (म्हणजे सूर्यापासून अतिशय दूर) ग्रह गेला म्हणजे त्याची गति अतिशय **मन्द** होते; आणि तो **सूर्याच्या जवळ** म्हणजे **नीचोच्चीं** (Perihelion मध्यें) गेला म्हणजे तो फारच जोरांत पुढें जातो. ही सर्व **संकलित गति म्हणजेच मन्दफल होय.** परमोच्च–स्थानीं ग्रहाची गति मध्यम गतिपेक्षां कमी असते. म्हणून तेथून **गतिफल ऋण** असतें आणि नीचोच्चीं मध्यम गतिपेक्षा गति अधिक म्हणून तेथून गतिफल **धन** असतें. ज्या ठिकाणीं मन्दफल शून्य त्या ठिकाणीं गतिफल धन किंवा ऋण परंतु ते ज्यास्तींत ज्यास्त असतें. आणि ज्या ठिकाणीं मन्दफल आत्यंतिक, तेथें गतिफल शून्य. म्हणून मन्दफल हे भुजज्येशीं प्रमाणबद्ध आणि गतिफल कोटिज्येशी प्रमाणबद्ध आहे असें सिद्ध होतें.

इंग्रजी पद्धतींत अन्त्यफलज्येच्या ऐवजीं अंत्यफलच घेतात; पण " भुजज्या " घेतली किंवा फल घेतलें तरी परमफलाच्या दृष्टीनें एकच. सिद्धान्तोक्त रविचें परमफल २° १०′ आणि आधुनिक परमफल १° ५५′ असल्यामुळेंच रवि भोगांत फरक पडतो; म्हणून आतां दृष्ट फलाकरितां परमफल १° ५५′ हेंच घेतलें पाहिजे.

कोटिफलाची सारणि त्याचप्रमाणें

अन्त्यफलज्या × केन्द्र कोटिज्या ÷ त्रिज्या = कोटिफल.

सिद्धान्त गणितातहि दीर्घवर्तुळीय कक्षा परिणामतः कशी मानली जाते तें पाहू. " ग्रह " ज्या कक्षा वृत्तात फिरतो त्याचा मध्यबिन्दू क आहे. पृथ्वीवरून पाहणाराला ग्रह दिसतो त्याचे वर्तुळाचा मध्यबिन्दू भू आहे. क येथून ग्रह ज्या ठिकाणीं दिसेल त्यापेक्षां भु–प्र–क ह्या कोनाइतक्या फरकानें तो भू ह्या ठिकाणाहून दिसेल. म्हणून भू-प्र-क हें शीघ्रफल आणि भू-प्र हा शीघ्र कर्ण.++भूवर्तुळ आणि कक्षा वर्तुळ ह्या दोहोंच्या संमेलनानें जी आकृति निर्माण झालेली दिसतें ती (परिणामत.) दीर्घवर्तुळाप्रमाणें आहे. उच्च–उच्च′ ही रेषा हा त्याचा महत्–अक्ष (म्हणजे Axis major). भू आणि क हे

बिन्दू दोन नाभिशी (Foci शीं) साम्य पावणारे असें आहेत. उच्च बिन्दूपासून ग्रहापर्यंत जें परिघ-खण्ड अथवा चाप तेंच इष्टकेन्द्र; ग्र-ज्या ही त्याची दोर्ज्या; (Sine); क-ज्यो ही केन्द्र कोटिज्या; आणि भू-क रेषा ही अन्त्यफलज्या आहे.

आतां भू-ग्र-जी कर्णरेषा तिची निष्पत्ति.—आकृतिवरून पाहिल्यास भू-ज्या रेषा ही भू-क+क-ज्या ह्यांचेबरोबर आहे. म्हणून (अन्त्यफलज्या+कोटिज्या)^2 + केन्द्रदोर्ज्यावर्ग=कर्ण (भू-ग्रह) वर्ग म्हणून अन्त्य फलज्या + कोटिज्या ह्यांच्या वर्गांत केन्द्र दोर्ज्याचा वर्ग मिळवून त्यांच्या बेरजेचें वर्ग मूळ काढलें असतां भू-ग्र कर्णाची किंमत येईल.

ग्रह हा उलट बाजूस * ह्या ठिकाणीं असेल तर (कोटिज्या-अन्त्यफलज्या) वर्ग + केन्द्र दोर्ज्या वर्ग=कर्ण वर्ग असें समीकरण निघतें. तेथें ' को-क ' ही कोटिज्या आणि * ग्र-को ही दोर्ज्या आहे.

ग्र-दो ही ग्रहकेन्द्र दोर्ज्या
प-दो ही ग्रहकेन्द्र कोटिज्या
भू-प ही प्रतिवृत्त त्रिज्या
प-ग्रह ही अंन्त्यफलज्या.
भू-ग्रह हा शीघ्रकर्ण
* हें स्पष्ट ग्रहाचें स्थान

सिद्धान्तकारांनीं मन्दफल आणि शीघ्रफल त्यांच्या साधनासाठीं एका विशिष्ट आकृति रचनेचा अवलंब केला आहे.

भू (पृथ्वी) हा ज्याचा मध्यबिन्दु आहे तें वर्तुळ प-रि-ध ह्या परिघानें दाखविलें आहे.

ग्रह ज्या मन्दपरिधिंच्या (किंवा शीघ्रपरिधिंच्या) धोरणानें फिरतो तो परिधि ग्र-उच्च-दो-नी ह्या वर्तुळानें दाखविला असून प-ग्रहरेषा ही त्या वर्तुळाची त्रिज्या आहे. अन्त्यफलज्ये समान त्रिज्येनें तें वर्तुळ काढलें असल्यानें प-ग्रह ही अन्त्य फलज्या आहे.

(१) भू-नी-उच्च ह्या रेषेचे दोन-भाग पडतात. एक भू-प ही भूवर्तुळ त्रिज्या आणि प-उच्च ही रेषा हा दुसरा.

(२) ह्या अखंड रेषेवर ग्रहापासून दोर्ज्या काढल्यामुळें ग्र-उ हें परिधितील चाप आणि

(३) { ग्र-दो ही दोर्ज्या, तसेंच
प-दो ही कोटिज्या

(४) भू-दो ही रेषा=' भू-प ' (त्रिज्या) +कोटिज्या

(५) दोर्ज्यावर्ग+कोटिज्यावर्ग=अन्त्यफलज्यावर्ग, ह्या किंमती निश्चित झाल्या.

आकृतिवरूनही मन्दफल साधन करितां येतें. फक्त मन्दपरिधि अगोदर

श्लोक ३८ प्रमाणें स्फुट केला पाहिजे. आकृतिंत ग्रह—उच्च हें जें परिधिखण्ड तेंच भुजफल अथवा मन्दफल होतें. आतां त्याची निश्चिति अशी:—

जो संबंध किंवा जें गुणोत्तर दोर्ज्या आणि त्रिज्या ह्यांचें, तेंच भुजफल आणि परिधि ह्यांचें गुणोत्तर आहे. म्हणून

$$\frac{\text{भुजफल}}{\text{स्फुटपरिधि}} = \frac{\text{केन्द्रभुजज्या}}{\text{परिधि}}$$

$$\therefore \text{भुजफल} = \frac{\text{केन्द्रभुजज्या} \times \text{स्फुटपरिधि}}{\text{परिधि}}$$

फक्त सिद्धांतकारांनीं परिधि ऐवजीं ३६० अंशांचा भाग दिला आहे. कारण भुजफल हें परिधांशात्मक आहे ह्याचेंच धनु म्हणजे मन्दफल

मन्दफल हें केन्द्र मेषादि (म्हणजे मन्दोच्चापासून मोजलेलें) असेल तेव्हां ऋण आणि तुलादि (नीचोच्चापासून) असेल तेव्हां धन असतें. (श्लोक ४५ पहा).

आतां शीघ्रफल साधन शीघ्र परिधिवरून सांगतात.

शैघ्र्यंकोटिफलंकेन्द्रे मकरादौधनंस्मृतम् ॥
संशोध्यंतुत्रिजीवायां कर्कादौकोटिजंफलम् ॥ ४० ॥

शीघ्रफलाकरितां (शीघ्रपरिधिवरून) कोटिज्या काढावी. शीघ्रकेन्द्र मकरादि (२७० अंशापेक्षां अधिक) असेल तर कोटिज्या भूत्रिज्येंत मिळवावी, आणि शीघ्रकेन्द्र कर्कादि (९० अंशापेक्षा अधिक) असेल तर कोटिज्या त्रिज्येंतून वजा करावी म्हणजे (भू—उच्च रेषेवरील) काटकोनाची एक बाजू निष्पन्न झाली. दोर्ज्या अथवा भुजज्या ही दुसरी बाजू सिद्धच आहे.

स्पष्टीकरण:—आकृतीकडे लक्षपूर्वक पाहिल्यास (४) प्रमाणें 'भू—दो' ही काटकोनाची एक बाजू प—दो (कोटिज्या) आणि भू—प त्रिज्या ह्यांनीं बनलेली दिसेल पण असाच शीघ्र परिधि उलट बाजूस घ हा मध्य कल्पून काढला तर त्रिज्येंतून कोटिज्या वजा करून एक बाजू निष्पन्न करावी लागते. म्हणूनच कर्कादि केन्द्र असतां कोटिज्या वजा करण्यास सिद्धान्तकारांनीं सांगितलें आहे.

ह्याप्रमाणें काटकोनाच्या दोन बाजू ठरल्यावर त्रिकोणाची तिसरी बाजू म्हणूनं कर्णाची किंमत $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ह्या सूत्राप्रमाणें काढतां येते त्या कर्णाच्या अनुरोधानें स्पष्टग्रहाचें स्थान* ठिकाणीं दिसतें "प" ह्या ठिकाणीं मन्दस्पष्ट स्थान मानून प—ग्रह—भू हा कोन शीघ्रफल म्हणून निश्चित होतो.

तद्बाहुफलवर्गैक्यान्मूलंकर्णश्चलाभिधः ॥
त्रिज्याभ्यस्तंभुजफलंचलकर्णविभाजितम् ॥ ४१ ॥

लब्धस्यचापंलिप्तादिफलं शैघ्र्यमिदंस्मृतम् ॥
एतदाद्येकुजादीनांचतुर्थेचैवकर्मणि ॥ ४२ ॥

म्हणून दोर्ज्या वर्ग अधिक (त्रिज्या $\pm$ कोटि) वर्ग ह्यांची बेरीज करून तिचें वर्गमूळ काढलें असतां शीघ्रकर्णाची निष्पत्ति होते.

शीघ्र दोर्ज्येस त्रिज्येनें गुणून शीघ्रकर्णानें भागिलें असतां जो भागाकार येतो त्यावरून पुनः चापरूप कोन आणावा; त्या चापास किंवा कोनास शीघ्रफल म्हणतात.

ह्या **शीघ्रफलाचा** मन्दस्पष्ट ग्रहांना संस्कार चौथ्या खेपेस केला म्हणजे तो ग्रह पूर्णपणें स्पष्ट होतो.

स्पष्टीकरण:—शीघ्र फल काढण्याचे कामी सिद्धान्तकारांनीं त्रिकोण मितिमध्यें खरोखरच उत्कृष्ट प्राविण्य प्रदर्शित केलें आहे. इतकें असूनहि सिद्धान्तोक्त रीति आधुनिक पाश्चिमात्य गणितापेक्षां **पुष्कळच सोपी** ठरते. त्यामुळें तिच्यांत थोडी स्थूलता येईल. पण आधुनिक गणित पद्धतीनें तिच्यांतील सोपेपणा न घालवितांहि ती सूक्ष्म करतां येईल.

पाश्चात्य गणिताप्रमाणें प–ग्रह–भू ह्या–त्रिकोणांत प–ग्र हा चलकर्ण (Radius Vector) आहे. प बिन्दूतील बाह्य कोन (A) हा माहीत आहे. भू–प ही रेषा भू–सूर्य ह्यामधील अन्तर दर्शविते; तेव्हां भू–प = b, आणि प–ग्र = c म्हणून

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \times \cot \frac{A}{2}$$

ह्यांत A ची किंमत आणल्यावर ग्र आणि भू हे कोन काढतां येतात; त्यावरून शीघ्रफल (Elongation) काढतां येतें. परंतु सिद्धान्तकारांनीं केवळ साध्या त्रैराशिकानें हें अवघड गणित सोडविण्याचा प्रयत्न केला आहे. तथापि तो उत्तम साधला आहे; *असें कोणाहि गणितज्ञाला कबूल करणें भाग पडेल.*

सिद्धान्तकार त्रैराशिक मांडतात तें असें:—

भू–ग्रह ह्या कर्णास : जशी ग्र–दो ही दोर्ज्या : : तशी

भू– * १ ह्या कर्णास (किती ?) कोणती दोर्ज्या हें प्रमाण पूर्णपणें शास्त्रीय आहे. कारण समानकोन–त्रिकोण हे समरूप असतात (Egmangular triangles are similar) ह्या भूमितिच्या प्रमेयानुसारच तें स्वीकारलेलें आहे. प्रत्यक्ष गणित करतांना कसर येवढीच सोडली कीं भू– '* १' हें अन्तर भू–प ह्या त्रिज्येशीं समान मानलें आहे. आतां त्रैराशिक ठरलें तें असें:—

कर्ण : भुजज्या : : त्रिज्या : शीघ्रफलज्या.

$$\therefore \frac{\text{त्रिज्या} \times \text{शीघ्रकेन्द्र भुजज्या}}{\text{कर्ण}} = \text{शीघ्रफलरेषा}$$

तिच्यावरून चाप (arc) येईल तें शीघ्रफल.

मान्दंकर्मैकमर्केन्द्वोर्भौमादीनामथोच्यते ॥
शैघ्र्यंमान्दंपुनर्मान्दंशैघ्र्यंचत्वार्यनुक्रमात् ॥ ४३ ॥

ग्रह स्पष्टीकरणांत मन्दकर्म (मन्दफळ निष्पादन) आणि शीघ्रकर्म अशा दोन महत्त्वाच्या क्रिया आहेत. पैकीं रवि, आणि चन्द्र हे फक्त मन्द फळानेंच स्पष्ट होतात. परंतु, मंगळ, बुध, गुरु, शुक्र आणि शनि ह्या पंच ग्रहाना प्रथमतः शीघ्रफळानें संस्कार करून मग मन्दफळ देतात नंतर मन्दफल संस्कृत ग्रहासच पुन्हां मंदफळ पुन्हां देऊन शेवटीं शीघ्रफळाचा संस्कार करितात.

स्पष्टीकरणः—ह्या असकृत् (पुनः पुनः) संस्करणाची आवश्यकता सांगण्याचा हेतु असा दिसतो कीं, आधुनिक गणितपद्धतिप्रमाणें प्रथमतः रवि पूर्णपणें स्पष्ट करूनच नंतर त्याच्या अपेक्षेनें चन्द्र आणि बुधादि पञ्च ग्रह स्पष्ट करतात. त्यामुळें सिद्धान्त-कारांच्या म्हणण्याप्रमाणें दोन मन्दफळें दिलीं जातातच. एक रविला आणि–एक ग्रहाला. आतां दोन शीघ्रफळाचा हेतु असा दिसतो कीं, पृथ्वी आणि रवि, त्याचप्रमाणें रवि आणि ग्रह ह्यांचें अन्तर नेहमीं सारखें नसतें. (ह्या अन्तरालाच कर्ण म्हणतात.) त्या कारणानें मध्यकर्णापासून जर ग्रह स्पष्ट करावयाचा तर पुनः मन्दफल आणि शीघ्रफल असे संस्कार दिलेच पाहिजेत. आधुनिक गणितांत केन्द्राच्या प्रत्येक अंशाला ग्रह सूर्या-पासून किती अतरावर असतो तें काढतात. त्या योगानें स्पष्टीकरण जास्त सूक्ष्म होते. परंतु सौलभ्याच्या दृष्टीनें सिद्धान्तकारांची असकृत् कर्माची युक्तिहि योग्यच आहे असें त्रिकोणमितीने सहज सिद्ध होऊ शकेल.

मध्येशीघ्रफलस्यार्धं मान्दमर्धफलंतथा ॥
मध्यग्रहेमन्दफलंसकलंशैघ्र्यमेवच ॥ ४४ ॥

हें असकृत् कर्म (पुनःपुनः सस्कार देण्याचें कार्य) करतांना पहिल्या शीघ्रफळाचा संस्कार करतें वेळीं शीघ्रफळाचें चाप येईल त्याचा अर्धा भाग घेऊन त्याचाच संस्कार मध्यम ग्रहास करावा (पूर्ण फळाचा संस्कार देऊ नये). नतर मन्दफळाचा संस्कार देणें तोहि अर्ध्या मन्दफळाचाच द्यावा. तिसरा सस्कार पुन. मन्दफळाचा आणि शेवटचा चौथा शीघ्रफळाचा हें संस्कार मात्र पूर्ण फळाचे द्यावें.

अशी युक्ति करण्याचें कारण सांगितलेंच आहे. मध्यमकर्णापासून दृक्प्रत्ययसिद्धि हेंच कारण होय.

उच्च म्हणजे काय ?

प्रत्येक ग्रहाच्या कक्षेमध्यें उच्च संज्ञक आणि एकमेकांपासून बरोबर सहा राशि (१८० अंश) च्या अन्तरावर दोन बिन्दुरूप स्थानें असतात, ह्यांचा उल्लेख मध्यमाधि-कारांत आलाच आहे. ग्रह कक्षेच्या अगदीं वास्तविक मध्यबिन्दूच्या ठिकाणीं सूर्य नसतो. तो कमी अधिक बाजूला असतो. कक्षा मध्यबिन्दू आणि रवि ह्याच्यातील अन्त-राला मध्यच्युति म्हणतात. ह्या सरकण्यामुळें कक्षेतील एकबिन्दु सूर्यापासून सर्वापेक्षां

जवळ येतो आणि त्याच्या उलट दिशेचा (१८० अंशावरील) बिन्दू सूर्यापासून सर्वांपेक्षां **दूर** असतो. ह्या दूरच्या बिन्दूला **दूरोच्च** किंवा **मन्दोच** आणि जवळच्या बिन्दूला **निकटोच्च** किंवा **नीचोच्च** असें नांव आहे. ह्या दोन उच्चांच्या ठिकाणींच मध्यमग्रह आणि (कक्षा) स्पष्टग्रह ह्यांचें ऐक्य असतें. कक्षेंतील इतर सर्व ठिकाणी ते भिन्न असतात.

केन्द्र हें कोणत्यातरी उच्चापासून मोजतात. दूरोच्चापासून तें मोजलें तर तेथून सहा राशीपर्यंत मन्दफल ऋण असतें, कारण स्पष्टग्रह मध्यमग्रहाच्या मागें असतो; आणि केन्द्र **निकटोच्चा** पासून मोजल्यास तेथून सहाराशीपर्यंत मन्दफल **धन** असतें. कारण स्पष्टग्रह मध्यम ग्रहाच्या पुढें असतो. सिद्धान्तकारांनीं निकटोच्चापासून केन्द्रांश मोजले असल्याकारणानें मन्दफल केन्द्रापासून पहिल्याराशिमध्यें **धन** ठरलें गेलें.

अजादिकेन्द्रेसर्वेषांशैघ्रेमान्देचकर्मणि ॥
धनंग्रहाणांलिप्तादितुलादावृणमेवच ॥ ४५ ॥

केन्द्र (मन्द किंवा शीघ्र) मेषादि असलें म्हणजे सूर्यादि सर्व ग्रहांचा मन्दफल संस्कार, आणि शीघ्रफल संस्कार असे दोन्ही संस्कार **धन** असतात. अर्थात् केन्द्र तुलादि असेल तर फल संस्कार **ऋण** केला पाहिजे.

स्पष्टीकरणः—ऋण संस्कार मध्यम ग्रहांत **ऋण** करावयाचा. आणि **धन** संस्कार मिळवावयाचा असतो. संस्कार ऋण आणि धन कां असतो त्याचें कारण आतां वर सांगितलेंच आहे. निरनिराळ्या ग्रंथकारांनीं ग्रह केन्द्रें स्वेच्छेनें **निकटोच्च** बिन्दूपासून अथवा **दूरोच्चा**पासून मोजलेलीं असतात त्यामुळें एका ग्रंथकारानें जो फल—संस्कार धन सांगितला असेल तो दुसऱ्या ग्रंथकाराचा **तसाच** असेल असें नाहीं. म्हणून ग्रंथकारानें केन्द्र कोठून मोजलें आहे हें अवश्य पहावें लागतें. नाहीं तर एका ग्रंथाचा अभ्यास केलेला विद्यार्थी दुसऱ्या ग्रंथाची पद्धति तुलनेकरितां पहातांना केन्द्रमापन भिन्न उच्चापासून असेल तर बुचकळ्यांत पडेल. फलें **ऋण—धन** करतांना उलट सुलट होण्याचा पुष्कळ संभव असतो म्हणून बरेच आधुनिक ग्रंथकार गणितांतील सर्व संस्कार **धनच** राहतील अशी योजना करतात. सिद्धान्तकारांनीं केन्द्रासंबंधें **मेषादि** आणि **तुलादि** अशा संज्ञा योजल्या त्या केवळ केन्द्र शून्य आणि १८० अंश ह्याच अर्थानें आहेत. मध्यम ग्रहाचा मेष आणि ग्रह केन्द्राचा मेष (सृष्ट्युत्पत्तिनंतर) केव्हांहि **एक** नव्हते, आणि नाहींत.

ग्रह स्पष्टीकरण म्हणजे काय

श्लोक ४५ पर्यंत रवि, चन्द्र आणि बुधादि पञ्चग्रह ह्यांचें स्पष्टीकरण सिद्धान्तकारांनीं सांगितलें. येथून (म्हणजे पृथ्वीवरून आणि त्यांतहि पडताळा पाहणारास त्याच्या ठिकाणावरूनच) रवि, चन्द्र आणि इतर प्रत्येक ग्रह आकाशांत **कोठें** दिसूं शकतील **तें स्थान** गणितानें बिनचूक कळणें, आणि त्याप्रमाणें ते ग्रह तेथेंच प्रत्यक्ष (डोळ्यांना) दिसणें ह्यालाच **स्पष्टीकरण** म्हणतात. रवि, चन्द्र आणि ग्रह ह्यांची स्थिति आकाशांत

काल, आणि **स्थल** ह्यांच्या **परस्पर अपेक्षेनेंच** ठरत असते, आणि ठरवावी लागते. क्षितिज, याम्योत्तरवृत्त, विषुववृत्त, आणि आक्रमवृत्त त्याच्या अपेक्षेनें रवि, चन्द्र ह्यांचें आणि त्याचप्रमाणें इतर प्रत्येक ग्रहाचें स्थान निश्चित होतें. रविचा (किंवा इतर ग्रहाचा) उदय (१) अमुक **वेळीं क्षितिजाच्या** कोणत्या बिन्दूत झाला पाहिजे (२) किंवा कोणत्या वेळीं त्याचे उन्नतांश किती होते अथवा असतात, किंवा त्याचा (३) **याम्योत्तर लंघनकाल** कोणता, व याम्योत्तराच्या (४), कोणत्या अंशामधून तो याम्योत्तरातून गेला; अथवा (५) त्याच्या याम्योत्तर लंघन--कालापासून कोणती ठळकतारा किती **वेळानें** *याम्योत्तरावर येईल; अथवा कोणती ठळक तारा याम्योत्तरावर आल्यापासून* तो ग्रह किती वेळानें याम्योत्तर लंघन करील इत्यादि मुख्य गोष्टी वरूनच रवीचें, चन्द्राचें किंवा इतर ग्रहाचें आकाशामध्यें **आक्रमवृत्तावरील** किंवा विषुववृत्तावरील स्थान अचूक समजतें. ह्याप्रमाणें ग्रहाचें किंवा रविचें स्थान ठरवून त्याप्रमाणें तो ग्रह तेथेंच दिसला म्हणजे गणित खरें, त्याचा **दृक्प्रत्यय** आला असें म्हणतात. प्रत्येक ग्रहाच्या स्पष्टी करणांत वरील गोष्टी शक्य तों अवश्य असतातच, परंतु कोणताहि ग्रह, त्याच प्रमाणें कोणतीहि तारा, जोपर्यंत **क्षितिजाच्या वर** रवि आहे तोंपर्यंत दिसत नाहीं; चन्द्र (थोडाच वेळ दिसतो, पण बेतानेंच) त्यामुळें ग्रहाचा **दृक्प्रत्यय** फक्त रात्रीं आणि **निरभ्र** आकाशांतच घेणें शक्य असतें; म्हणून ग्रहांचें स्पष्टीकरण पुष्कळ वेळां **सूर्याच्या धोरणानें** निश्चित करतात. ग्रहस्पष्टीकरणांत तो ग्रह क्षितिजावर ज्या वेळीं येणार ती **वेळ कोणती,** आणि त्यावेळीं त्याचें स्थान **क्रान्तिवृत्तांत** कोणतें हा ही भाग ग्रहस्पष्टी-*करणांतच सिद्धांतकारांनीं श्लोक ४६ मध्यें सांगितला आहे.* तो तेथें योग्यच आहे, परंतु विषय संदर्भाच्या दृष्टीनें हा श्लोक ५७ श्लोकाच्या पुढें आल्यास हरकत नाहीं।

अर्कबाहुफलाभ्यस्ताग्रहभुक्तिर्विभाजिता ॥
भचक्रकलिकाभिस्तुलिप्ताः कार्याग्रहेऽर्कवत् ॥ ४६ ॥

ग्रहाच्या भोगास (स्पष्टगतिस) सूर्याच्या (कलात्मक) मन्दफलानें गुणावें आणि राशिचक्राच्या (२१६००) कलासंख्येनें भागावें; जो भागाकार कला (विकलात्मक) येईल त्याचा रविमन्दफलाप्रमाणें (धनऋण) संस्कार ग्रहभोगास (गतिस) करावा. ४६.

स्पष्टीकरणः—हा श्लोक कांहींसा अस्पष्ट आहे. ग्रहभुक्ति ह्याचा अर्थ ग्रहभोग असून टीकाकारांनीं त्याचा अर्थ स्पष्टगति असा घेतला आहे. तोहि सयुक्तिक आहे. परंतु हा संस्कार ग्रहगतिस करण्यापेक्षां ग्रहाच्या स्पष्टस्थितीसच करणें योग्य दिसतें. कारण ग्रहाचें मध्यमकालाम अनुलक्षून असणारें स्थान आणि स्पष्ट कालास धरून असणारें स्थान ह्यांत भिन्नता आहे; आणि तीच ह्या श्लोकांत विवक्षित आहे.

ह्या संस्कारास भुजान्तर संस्कार म्हणतात. रविचें स्पष्टस्थान आणि कालदृष्ट्या **स्पष्टगति** ह्यांत दोन कारणानीं फरक पडतो. त्यांतील एक कारण रविच्या (म्हणजे पृथ्वीच्या) कक्षेची दीर्घवर्तुळीयता. सूर्य हा तारीख ४ जुलैच्या सुमारास पृथ्वीपासून फार दूर असतो

आणि म्हणून त्याची दिनगति ५७′ कला ही मध्यम गतिपेक्षां कमी असते. म्हणून मन्दफळहि ऋणच असतें. तारीख २ जानेवारीच्या सुमारास तो पृथ्वीला फार जवळ असतो. म्हणून त्याची दिनगतिहि ज्यास्तीत ज्यास्त म्हणजे ६१′ कळा असते; आणि म्हणून मन्दफळहि धन असतें. जानेवारीच्या आरंभीं म्हणजे नीचोची रवी पृथ्वीच्या जवळ असतांहि आपल्या इकडे (उत्तरगोळार्धांत) दिवस थंडीचे असतात; कारण सूर्य मध्यान्हीं आपल्या डोकीवर येत नाहीं. तो दक्षिणेकडेच असून क्षितिजाच्यावर फार थोडा-वेळ असतो. ह्याच्या उलट, जुलै ४ च्या सुमारास उन्हाळा संपत आलेला असतो. कारण सूर्य हा मध्यान्हीं डोकीवर येतो आणि क्षितिजाच्यावर सुमारें १४ तास असतो.

अशा ह्या कमीज्यास्त गतिमुळें मध्यम आणि स्पष्टकालांत अन्तर पडतें, तें रविच्या मन्दफल गतिकालाइतकें असतें. हेंच भुजान्तर.

दुसरें कारण पृथ्वीची कक्षा (म्हणजे आक्रमवृत्त) विषुवाशीं तिर्कस आहे हें होय. ह्या तिर्कसपणामुळें बारा राशिपैकीं प्रत्येक राशींत जरी सारखेच अंश आहेत तरी त्यांचा उदय होण्यास आणि त्या मध्यान्ह वृत्तावरून पुढें सरकण्यास **वेळ मात्र कमी ज्यास्त लागतो.** ह्याला **उदयान्तर** म्हणतात. ह्यावरूनच उदयलग्नाचें आणि दशम लग्नाचें गणित होतें.

प्रथमतः **उदयान्तराच्या** योगानें निरनिराळ्या राशिनां मध्यान्हवृत्त ओलांडून जाण्यास किती काळ लागतो तो निश्चित करावा ह्या कालास **उदयासु** म्हणतात. " असु " म्हणजे एक श्वासोच्छ्वास. एका पळांत **सहा** श्वास होतात. हें मागें मध्यमाधिकारांत सांगितलें आहे. ही **उदयासु**-संख्या ठरल्यावर ज्या **सायन**-राशींत सूर्य असेल, त्या राशिच्या उदयासुवरून त्रैराशिक माण्डावें. एक राशिच्या कळा १८०० म्हणून १८०० कलांना : जर अमुक उदयासु : : तर : मन्दफल कलांना किती. उत्तर असुमध्यें येईल.

हे भुजान्तराचे असु. ह्यामध्यें उदयान्तराचे असुचा (धनऋण असेल त्याप्रमाणें) संस्कार करावा म्हणजे **कालकलन** संस्कार सिद्ध होतो. ह्यालाच Equation of Time म्हणतात.

भुजान्तराचा संस्कार इतर ग्रहास करावयाचा असल्यास आणखी एक त्रैराशिक मांडावें.

२१६०० कलामध्यें : जर रविचे अमुक फलासु : : तर ग्रहाच्या गतिकालास किती ? उत्तर. असुसंख्या येईल. तो रविसंबंधाचा संस्कार इतर ग्रहांस करावा.

आतां ग्रहांची दैनिक स्पष्ट गति आणि त्यांचा स्पष्ट शर म्हणजे आक्रम वृत्तापासून त्या ग्रहापर्यंतचें **लम्बांशात्मक अन्तर.** [जेव्हां ग्रहाच्या स्थानापासून **आक्रमवृत्तावर,** विषुववृत्तावर, किंवा **क्षितिजावर** लम्बरूप चाप (arc) काढतात, आणि ग्रहापासून त्या त्या वृत्तापर्यंतचें अंशात्मक अन्तर त्या त्या लम्बावरूनच मोजून ठरवितात. तेव्हां अशा अन्तराला लम्बात्मक अन्तर, किंवा अवलम्बांश म्हणतात].

हें अवलंम्बांश ग्रहापासून आक्रमवृत्तापर्यंतच्या लम्बावर मोजले म्हणजे त्याला **आक्रमशर** (Latitude) म्हणतात; विषुववृत्तापर्यंच्या लम्ब अन्तराला **क्रांति** (Declination); आणि क्षितिजापर्यंतच्या अन्तराला **उन्नतांश** (Altitude) म्हणतात. हें पुन: येथें सांगणें अवश्य आहे.

आपल्या थेट डोक्यावर जो आकाश बिन्दू तें खस्वस्तिक. त्यांतूनच आपल्या ठिकाणचें याम्योत्तर वृत्त हें विषुववृत्त आणि ध्रुवबिन्दू ह्यांतून पार **क्षितिजापर्यंत** जातें. याम्योत्तर हें **विषुववृत्ताला** आणि **क्षितिजालाहि** लम्बरूप असतें म्हणून **विषुवापासून** खस्वस्तिकापर्यंतचें जें **अवलम्बांश** तेच त्या स्थानाचे **अक्षांश** (Terristrial Latitude). इंग्रजीमध्यें (Latitude) ही जी संज्ञा आहे ती शास्त्रदृष्ट्या दूषणीय आहे. आकाश-विषुवापासून खस्वस्तिकाचे जे लम्बांश ते (Latitude), आणि आक्रमवृत्तापासून मोजलेले लम्बांश तेहि (Latitude) च. ह्याप्रमाणें दोन **अगदीं भिन्न** अंशी परिमाणें एकाच संज्ञेनें निर्दिष्ट करण्याचा प्रघात शास्त्रीयपद्धतीप्रमाणें फारच दूषणीय आहे.

स्वमन्दभुक्तिसंशुद्धामध्यभुक्तिर्निशापतेः ॥
दोर्ज्यान्तरादिकंकृत्वाभुक्तावृणधनंभवेत् ॥ ४७ ॥

चन्द्राच्या मध्यम दिनगतीमध्यें त्याच्या उच्चाची दिनगति वजा करावी म्हणजे त्याची (ह्म० चन्द्राची) दैनिक केन्द्रगति येईल त्या केन्द्रावरून भुजज्यान्तराच्या रीतीनें गतिफल आणावें आणि ठरल्याप्रमाणें मध्यमदिनगतिमध्यें ऋण–धन (असेल त्याप्रमाणें त्याचा) संस्कार करावा; म्हणजे चन्द्राची स्पष्ट दिनगति (इष्ट दिवसाची) येईल.

स्पष्टीकरण:—चन्द्राची स्पष्टगति मन्दफलाप्रमाणें केन्द्रांशावरून आणण्यास सांगितलें आहे. कारण चन्द्राची उच्चगति हिशेबात घेण्याइतकी मोठी आहे. इतर ग्रहांच्या स्पष्टगतिहि अशाच पद्धतीनें काढतात.

ग्रहभुक्तेःफलंकार्यंग्रहवन्मन्दकर्मणि ॥
दोर्ज्यान्तरगुणाभुक्तिस्तत्त्वनेत्रोध्दृतापुनः ॥ ४८ ॥
स्वमन्दपरिधिक्षुण्णाभगणांशोध्दृताकलाः :
कर्कादौतुधनंतत्रमकरादावृणंस्मृतम् ॥ ४९ ॥

आतां गतिचें स्पष्टीकरण सांगतात:—

ग्रहगतिचें फल काढावयाचें, तर त्याकरितां ग्रहा (चें मन्दफल काढण्या) ची जी रीति आहे तिचाच स्वीकार गतिचें मन्दफल आणण्याकरितां करावा. ग्रहगतिला [अर्थात ग्रहाच्या दैनिक केन्द्रगतिला] दोर्ज्यान्तरानें गुणून २२५ कलांच्या (चाप) खण्डानें भागावें; आणि भागाकार येईल त्याला स्फुट मन्द परिधीनें गुणून ३६० अशानी भागावें म्हणजे गतिफल येईल. (तें बुधादि ग्रहांमध्यें मन्दस्पष्ट येईल).

स्पष्टीकरणः—ग्रहगति ही केन्द्रगतिवरच अवलम्बून आहे म्हणून केंद्रगति घेतली पाहिजे. नंतर ग्रह–भोगांचें जें चापखण्ड **त्याचें** दोर्ज्यान्तर घेऊन असें त्रैराशिक माण्डावें:—
२२५ चापखण्डांत जर : विशिष्ट दोर्ज्यान्तर :: तर केन्द्रगत्यंशांना किती :
उत्तर येईल तें.
नंतर गतिचे अंशकलादि पाहिजेत म्हणून दुसरें त्रैराशिक असें मांडलें पाहिजे:—
३६० अंशांना : स्फुटमन्दगतिपरिध्यंश : : तर पूर्वोक्त उत्तराला किती ? : उत्तर गतिकळा.
याप्रमाणें गतिफल आलें परंतु केन्द्र कर्कादि असेल तर तें धन असतें आणि मकरादि असेल तर ऋण असतें.

स्पष्टीकरण:—येथें केन्द्र काढण्यासाठीं उच्च कोणतें घेतलें तें अवश्य पाहिलें पाहिजे नाहीं तर ऋण धन संस्कारांचा घोटाळा उडाल्याशिवाय राहणार नाहीं.

मन्द स्पष्ट गतिला शीघ्र फलांचा संस्कार बुधादि पंच ग्रहांच्या गतिला केला पाहिजे, तो सांगतातः—

मन्दस्फुटीकृतांभुक्तिंप्रोज्झ्यशीघ्रोच्चभुक्तितः ॥
तच्छेषंविवरेणाथहन्यात्रिज्यान्त्यकर्णयोः ॥ ५० ॥
चलकर्णहृतंभुक्तौकर्णेत्रिज्याधिकेधनम् ॥
ऋणमूनेऽधिकेप्रोज्झ्यशेषंवक्रगतिर्भवेत् ॥ ५१ ॥

स्पष्टगति साधन

श्लोक ५०, ५१ बुधादिकांच्या मन्दस्पष्ट (मन्दफल साधित) गति, शीघ्रोच्च गतीतून वजा करून बाकी केन्द्रगति राहील, तिला त्रिज्या आणि शीघ्रकर्ण ह्यांच्यांतील अन्तरानें गुणावें आणि गुणाकाराला त्याच शीघ्रकर्णानें भागावें. भागाकार कलादि येईल त्याचा संस्कार मन्दस्पष्ट गतिला केला असतां ग्रहाची (भूमध्य) स्पष्टगति येईल. त्रिज्येपेक्षा शीघ्रकर्ण अधिक असेल तर हा **गतिसंस्कार धन** असतो; आणि त्रिज्या अधिक असेल तर **ऋण** असतो.

स्पष्टीकरणः—**रङ्गनाथ** टीकाकारांनीं ह्या संस्काराची उपपत्ति भास्कराचार्यांच्या पद्धतीनें उलगडावी अशी सूचना दिली आहे. तिला अनुसरून उपपत्तिचा उलगडा करूं.

आचार्यांचें सूत्र "फलांशखाङ्कान्तर–शिञ्जिनीघ्नी" हें आहे. तिच्या धोरणानें शीघ्रोच्च उणें मन्द स्पष्टगति=शीकेन्द्रगति काढली, व दोन दिवसांच्या शीकेन्द्रगतिचें जें अन्तर, त्यावरून दोर्ज्यान्तर काढलें.

(१) २२५′ : भोग्य–ज्या–खण्ड : : केन्द्रगतिला : दोर्ज्यान्तर ह्या त्रैराशिकानें दोर्ज्यान्तर आणलें. नन्तर भोग्यखण्ड स्पष्ट केलें तें असें:—

(२) $\frac{२२५' \text{(आद्यखण्ड)} \times \text{कोटिज्या}}{\text{त्रिज्या}}$ = स्फुट दोर्ज्यान्तर. मग

ही किंमत (१) मध्यें दोर्ज्यान्तराबद्दल ठेऊनः—

$$\text{स्फुट दोर्ज्यान्तर} = \frac{\text{केन्द्रगति} \times \text{फलकोटिज्या}}{\text{त्रिज्या}}$$

(३) कर्ण : दोर्ज्यान्तर : : त्रिज्या : स्फुटकेन्द्रगतिज्या; ही किंमत (२) मध्यें दोर्ज्यान्तराबद्दल ठेऊन:—

$$(४)\ \text{स्फुटकेन्द्रगतिज्या} = \frac{\text{केन्द्रगति} \times \text{फलकोटिज्या}}{\text{कर्ण}}$$

गति अल्प असल्यानें " गतिज्ये " बद्दल " गति " घेऊन

$$(५)\ \text{स्फुट-केन्द्रगति} = \frac{\text{केन्द्रगति} \times \text{फलकोटिज्या}}{\text{कर्ण}}$$

(६) परंतु शीघ्रकर्ण–त्रिज्या किंवा त्रिज्या–शीघ्रकर्ण
=फलकोटिज्या;

म्हणून,

$$\text{स्फुटकेन्द्रगति} = \frac{\text{केन्द्रगति} \times \text{कर्णत्रिज्यान्तर}}{\text{कर्ण}}.$$

*स्पष्टगतिफल हें मन्दस्पष्टगतिपेक्षां अधिक असेल तर **ग्रह वक्री आहे** म्हणून समजावें. ५१.

दूरस्थितःस्वशीघ्रोच्चात्ग्रहःशिथिलरश्मिभिः ॥
सव्येतराकृष्टतनुर्भवेद्वक्रगतिस्तदा ॥ ५२ ॥

श्लोक ५२ जेव्हां ग्रह शीघ्रोच्चापासून फार दूर अन्तरावर असतो; आणि (अशा स्थितींत असतांना) उच्चाच्या शक्तिनें लगाम (म्हणजे आकर्षण) ढिला असूनसुद्धां तो उलटा खेचला जातो तेव्हां वक्रगति उत्पन्न होते. ५२.

स्पष्टीकरणः—ग्रह दूर जातो तसतसें आकर्षण कमी कमी होत जातें यालाच ढिला लगाम असें म्हटलें आहे.

कृततुचन्द्रैर्वेदेन्द्रैःशून्यत्र्येकैर्गुणाष्टिभिः ॥
शररुद्रैश्चतुर्थेषुकेन्द्रांशैर्भूसुतादयः ॥ ५३ ॥
भवन्तिवक्रिणस्तैस्तुस्वैःस्वैश्चक्राद्विशोधितैः ॥
अवशिष्टांशतुल्यैःस्वैःकेन्द्रैरुज्झन्तिवक्रताम् ॥ ५४ ॥

श्लोक ५३—बुध–शुक्र, आणि भौमादि तीन ग्रह यांना चौथ्या खेपेस जो शीघ्रफल संस्कार करतात त्यावेळीं त्यांचे जे **शीघ्रकेन्द्रांश** येतील त्यांवरून ते वक्री आहेत की नाहींत तें (बहुधा) कळतें. आणि तेच केन्द्रांश बारा राशींतून वजा करून जितके अंश राहतील तितके केन्द्रांश झाले असतां ते वक्रत्वाचा त्याग करतील; म्हणून भौमाचे (केन्द्रांश) १६४, बुधाचे १४४, गुरुचे १३०, शुक्राचे १६३, आणि शनीचे ११५ इतके असले म्हणजे ग्रह

वक्री, आणि मंगळ १९६, बु. २१६, गुरु २३०, शु. १९७, आणि श. २४५ असे केन्द्रांश झालें म्हणजे ग्रह मार्गी होतात. (५३, ५४.)

महत्त्वाच्छीघ्रपरिधेःसप्तमेभृगुभूसुतौ ॥
अष्टमेजीवशशिजौनवमेतुशनैश्वरः ॥ ५५ ॥

श्लोक—ह्याचा अर्थ असा कीं,—मंगळ आणि शुक्र ह्यांच्या शीघ्रपरिधिचे अंश सहा राशीपेक्षां ज्यास्त झाले म्हणजे सातव्या राशींत ते मार्गी होतात. बुध, गुरु हे शीघ्रपरिधिच्या आठव्या राशींत आणि शनि नवव्या राशींत मार्गी होतो. ५५.

स्पष्टशराचें साधन

कुजार्किगुरुपातानांग्रहवच्छीघ्रजंफलम् ॥
वामंतृतीयकंमान्दंबुधभार्गवयोः फलम् ॥ ५६ ॥

श्लोक ५६—मंगळ, गुरु आणि शनि ह्यांच्या पाताला चतुर्थ शीघ्रफलाचा संस्कार ग्रहास करावयाच्या रीतिप्रमाणें करावा.

बुध शुक्रांच्या पाताला, बुध शुक्राचा तृतीय मन्दफलाचा उलट (= विलोम) संस्कार करावा. ५६.

स्वपातोनात्ग्रहाज्जीवाशीघ्राग्भृगुजसौम्ययोः ॥
विक्षेपघ्न्यंन्त्यकर्णाप्ताविक्षेपस्त्रिज्ययाविधोः ॥ ५७ ॥

श्लोक ५७—मग भौमादि स्पष्टग्रहांतून संस्कार दिलेला पात वजा करून बाकी राहील तिची दोर्ज्या काढावी.

स्पष्टचंन्द (हा पृथ्वी भोंवतालींच फिरत असल्यानें) त्याच्या भोगातून पात वजा करावा.

बुध शुक्रांच्या शीघ्रोच्चामध्यें संस्कृतपात वजा करून भुजज्या आणावी. हिलाच विक्षेप दोर्ज्या म्हणतात.

विक्षेप केन्द्रदोर्ज्येला परमशराच्या अंशकलांनीं गुणावें आणि शीघ्रकर्णानें भागावें, म्हणजे स्पष्टशर येतो.

चन्द्राच्या विक्षेप दोर्ज्येला विक्षेपानेंच गुणावें आणि त्रिज्येनें भागावें म्हणजे चन्द्राचा स्पष्टशर येईल. ५७.

स्पष्टीकरणः—स्पष्टशर साधन स्पष्टक्रान्ति साधनाच्या धर्तीवर आहे.

पातगति क्रान्तिवृत्तामध्यें (विलोम म्हणजे) उलट दिशेकडे असते. क्रान्तिवृत्त आणि पात ह्यांतील कोन **परमशरा** इतका असतो. ग्रहांच्या पाताचें क्रान्तीवृत्तांतील **स्थान निश्चित** करण्याकरितां पाताला फलसंस्कार केलाच पाहिजे.

भौम—गुरु—शनि हे बहिर्वर्ती ग्रह असल्यानें त्यांच्या पातास शीघ्रफलाचा संस्कार करण्यास सांगितलें आहे; आणि बुध शुक्र हे ग्रह **अन्तर्वर्ती** आहेत म्हणून त्यांच्या पाताला तृतीय मन्दफलाचा संस्कार केला म्हणजे काम भागतें.

बुध शुक्र हे अन्तर्वर्ती ग्रह असल्यानें त्यांची स्थिति कांहीं अंशी चन्द्राप्रमाणें असते. चन्द्र ज्याप्रमाणें शुक्ल पक्षांत पहिल्यानें चारपांच दिवस केवळ पश्चिमेकडेच दिसतो आणि पश्चिमेकडेच मावळतो; आणि मग कृष्ण पक्षांत शेवटचे चार दिवस फक्त पहाटेंच **पूर्वेकडे** उगवतो आणि सूर्य उगवला म्हणजे लुप्त होतो; त्या प्रमाणें बुध शुक्र हे कांहीं दिवस किंवा कांहीं महिने सूर्यास्ता नन्तर पश्चिमेकडे दिसतात. नंतर ते **वक्री** होऊन त्यांचा **पश्चिमास्त** होतो. त्यानंतर ते (व विशेषत: शुक्र) पूर्वेकडे सूर्योदयापूर्वी उगवूं लागतात. कांहीं दिवस ते अधिकाधिक वर येतात. नन्तर त्यांची वक्रगति संपून ते पुन: पूर्व क्षितिजाकडें जाऊं लागून त्यांचा पूर्वेकडे अस्त होतो. अशा स्थितिमुळें बुध शुक्रांची व्यवस्था व स्पष्टीकरणाची रीति सिद्धान्तकारांनीं भौम–गुरु–शनि त्यांच्यापेक्षां अगदीं निराळीच योजिली आहे.

बुध–शुक्र हे रविला सोडून फार दूर जात नाहींत असें निश्चित आढळल्यामुळें रवि हेंच सिद्धान्तकारांनीं **शीघ्रोच्च** मानलें आहे. **शीघ्रोच्च** म्हणजे ग्रहाची स्थिति **विशेष स्पष्ट** होण्याचें **साधन.** बुध शुक्र हे रवि मध्यवर्तीच असल्यामुळें त्यांचे **नाक्षत्रभगण** आणि शीघ्रोच्च भगण हे एकच ठरले. म्हणूनच मध्यमाधिकारांत त्यांचे शीघ्रोच्च भगण हेच **नाक्षत्र** भगण म्हणून दिले आहेत.

विवरण:—पाताची गति विलोम असल्यामुळें त्याचें स्थान मन्दस्पष्ट ग्रहावरूनच समजतें म्हणून मन्दस्पष्टग्रह+चक्र शुद्धपात; (पात हा चक्रशुद्ध आहे म्हणून **घन**; नाहीतर ऋण;) ∴ मन्दस्पष्टग्रह–पात हें उपकरण होतें, पण स्पष्टग्रह±शीघ्रफल विलोम=मन्दस्पष्टग्रह ∴ स्पष्टग्रह±विलोम शीघ्रफल–पात म्हणून स्पष्टग्रह–(पात±विलोम शीघ्रफल) हें उपकरण सिद्ध झालें. आतां बुध-शुक्रांसंबंधानें मन्दस्पष्टग्रह–पात; परंतु हे ग्रह शीघ्रोच्च स्पष्ट असतात म्हणून:—

शीघ्रोच्च±तृतीय मन्दफल विलोम=मन्दस्पष्टग्रह.

∴ पातालाच तृतीय मन्दफल संस्कार उलट करण्यास सांगितलें आहे.

∴ शीघ्रोच्च–(विलोम तृ. फ. संस्कृत पात) हें **उपकरणहि सिद्ध झालें.**

चन्द्राच्या पाताला संस्कार दिला पाहिजे परंतु तो न दिला तरी एकंदर फलामध्यें कला दीड कलेपेक्षां ज्यास्त फरक पडणार नाहीं, आणि तोहि अगदीं क्वचित् म्हणून पातोन चन्द्र हेंच चन्द्रशराचें उपकरण ठरलें.

पातोन ग्रहावरून जी दोर्ज्या येते तिला विक्षेपदोर्ज्या म्हणतात. तिच्या स्पष्टीकरणाचें गणित क्रान्तिप्रमाणें आहे:—

स्पष्टग्रहाच्या संबंधानें कर्ण म्हणजेच भू-कक्षेची त्रिज्या म्हणून–

कर्णान्तराला : जर परमशरांतकला : :

तर विक्षेपदोर्ज्येला किती: उत्तर स्पष्टशर.

वक्री, आणि मंगळ १९६, बु. २१६, गुरु २३०, शु. १९७, आणि श. २४५ असे केन्द्रांश झालें म्हणजे ग्रह मार्गी होतात. (५३, ५४.)

महत्त्वाच्छीघ्रपरिधेःसप्तमेभृगुभूसुतौ ॥
अष्टमेजीवशशिजौनवमेतुशनैश्चरः ॥ ५५ ॥

श्लोक—ह्याचा अर्थ असा कीं,-मंगळ आणि शुक्र ह्यांच्या शीघ्रपरिधिचे अंश सहा राशीपेक्षां ज्यास्त झाले म्हणजे सातव्या राशींत ते मार्गी होतात. बुध, गुरु हे शीघ्रपरिधिच्या आठव्या राशींत आणि शनि नवव्या राशींत मार्गी होतो. ५५.

स्पष्टशराचें साधन

कुजार्किगुरुपातानांग्रहवच्छीघ्रजंफलम् ॥
वामंतृतीयकंमान्दंबुधभार्गवयोः फलम् ॥ ५६ ॥

श्लोक ५६—मंगळ, गुरु आणि शनि ह्यांच्या पाताला चतुर्थ शीघ्रफळाचा संस्कार ग्रहास करावयाच्या रीतिप्रमाणें करावा.

बुध शुक्रांच्या पाताला, बुध शुक्राचा तृतीय मन्दफलाचा उलट (= विलोम) संस्कार करावा. ५६.

स्वपातोनात्ग्रहाज्जीवाशीघ्राभ्दृगुजसौम्ययोः ॥
विक्षेपघ्न्यंन्त्यकर्णाप्ताविक्षेपस्त्रिज्ययाविधोः ॥ ५७ ॥

श्लोक ५७—मग भौमादि स्पष्टग्रहांतून संस्कार दिलेला पात वजा करून बाकी राहील तिची दोर्ज्या काढावी.

स्पष्टचंन्द्र (हा पृथ्वी भोंवतालींच फिरत असल्यानें) त्याच्या भोगांतून पात वजा करावा.

बुध शुक्रांच्या शीघ्रोच्चामध्यें संस्कृतपात वजा करून भुजज्या आणावी. हिलाच विक्षेप दोर्ज्या म्हणतात.

विक्षेप केन्द्रदोर्ज्येला परमशराच्या अंशकलांनीं गुणावें आणि शीघ्रकर्णानें भागावें, म्हणजे स्पष्टशर येतो.

चन्द्राच्या विक्षेप दोर्ज्येला विक्षेपानेंच गुणावें आणि त्रिज्येनें भागावें म्हणजे चन्द्राचा स्पष्टशर येईल. ५७.

स्पष्टीकरण:—स्पष्टशर साधन स्पष्टक्रान्ति साधनाच्या धर्तीवर आहे.

पातगति क्रान्तिवृत्तामध्यें (विलोम म्हणजे) उलट दिशेकडे असते. क्रान्तिवृत्त आणि पात ह्यांतील कोन परमशरा इतका असतो. ग्रहांच्या पाताचें क्रान्तीवृत्तांतील स्थान निश्चित करण्याकरितां पाताला फलसंस्कार केलाच पाहिजे.

भौम–गुरु–शनि हे बहिर्वर्ती ग्रह असल्यानें त्याच्या पातास शीघ्रफळाचा संस्कार करण्यास सांगितलें आहे; आणि बुध शुक्र हे ग्रह अन्तर्वर्ती आहेत म्हणून त्यांच्या पाताळा तृतीय मन्दफळाचा संस्कार केला म्हणजे काम भागतें.

बुध शुक्र हे अन्तर्वर्ती ग्रह असल्यानें त्यांची स्थिति कांहीं अंशी चन्द्राप्रमाणें असते. चन्द्र ज्याप्रमाणें शुक्ल पक्षांत पहिल्यानें चारपांच दिवस केवळ पश्चिमेकडेच दिसतो आणि पश्चिमेकडेच मावळतो; आणि मग कृष्ण पक्षांत शेवटचे चार दिवस फक्त पहाटेच **पूर्वेकडे** उगवतो आणि सूर्य उगवला म्हणजे लुप्त होतो; त्या प्रमाणें बुध शुक्र हे कांहीं दिवस किंवा कांहीं महिने सूर्यास्ता नन्तर पश्चिमेकडे दिसतात. नंतर ते **वक्री** होऊन त्यांचा **पश्चिमास्त** होतो. त्यानंतर ते (व विशेषतः शुक्र) पूर्वेकडे सूर्योदयापूर्वी उगवूं लागतात. कांहीं दिवस ते अधिकाधिक वर येतात. नन्तर त्यांची वक्रगति संपून ते पुनः पूर्व क्षितिजाकडे जाऊं लागून त्यांचा पूर्वेकडे अस्त होतो. अशा स्थितिमुळें बुध शुक्रांची व्यवस्था व स्पष्टीकरणाची रीति सिद्धान्तकारांनीं भौम--गुरु--शनि त्यांच्यापेक्षां अगदीं निराळीच योजिली आहे.

बुध--शुक्र हे रविला सोडून फार दूर जात नाहींत असें निश्चित आढळल्यामुळें रवि हेंच सिद्धान्तकारांनीं **शीघ्रोच्च** मानलें आहे. **शीघ्रोच्च** म्हणजे ग्रहाची स्थिति **विशेष स्पष्ट** होण्याचें **साधन**. बुध शुक्र हे रवि मध्यवर्तीच असल्यामुळें त्यांचे **नाक्षत्रभगण** आणि शीघ्रोच्च भगण हे एकच ठरले. म्हणूनच मध्यमाधिकारांत त्यांचे शीघ्रोच्च भगण हेच **नाक्षत्र** भगण म्हणून दिले आहेत.

विवरणः—पाताची गति विलोम असल्यामुळें त्याचें स्थान मन्दस्पष्ट ग्रहावरूनच समजतें म्हणून मन्दस्पष्टग्रह+चक्र शुद्धपात; (पात हा चक्रशुद्ध आहे म्हणून **घन**; नाहीतर ऋण;) ∴ मन्दस्पष्टग्रह–पात हें उपकरण होतें, पण स्पष्टग्रह$\pm$शीघ्रफल विलोम=मन्दस्पष्टग्रह ∴ स्पष्टग्रह$\pm$विलोम शीघ्रफल–पात म्हणून स्पष्टग्रह–(पात$\pm$विलोम शीघ्रफल) हें उपकरण सिद्ध झालें. आतां बुध-शुक्रांसंबंधानें मन्दस्पष्टग्रह–पात; परंतु हे ग्रह शीघ्रोच्च स्पष्ट असतात म्हणूनः—

शीघ्रोच्च$\pm$तृतीय मन्दफल विलोम=मन्दस्पष्टग्रह.

∴ पातालाच तृतीय मन्दफल संस्कार उलट करण्यास सांगितलें आहे.

∴ शीघ्रोच्च–(विलोम तृ. फ. संस्कृत पात) हें **उपकरणहि सिद्ध झालें.**

चन्द्राच्या पाताला संस्कार दिला पाहिजे परंतु तो न दिला तरी एकंदर फलामध्यें कला दीड कलेपेक्षां ज्यास्त फरक पडणार नाहीं, आणि तोहि अगदीं क्वचित् म्हणून पातोन चन्द्र हेंच चन्द्रशराचें उपकरण ठरलें.

पातोन ग्रहावरून जी दोर्ज्या येते तिला विक्षेपदोर्ज्या म्हणतात. तिच्या स्पष्टीकरणाचें गणित क्रान्तिप्रमाणें आहे:--

स्पष्टग्रहाच्या संबंधानें कर्ण म्हणजेच भू-कक्षेची त्रिज्या म्हणून—

कर्णान्तराला : जर परमशरांशकला : :

तर विक्षेपदोर्ज्येला किती: उत्तर स्पष्टशर.

तारा किंवा **संपात** बिन्दू मध्यवृत्तावर आल्यापासून अगदीं बरोबर २४ नाक्षत्र तासांनीं तो पुन: तेथें येतो; म्हणून संपात मध्यवृत्तावर आला म्हणजे विषुवकाल शून्य (०) झाला. व **संपातानंतर** जी तारा जितक्या वेळानें मध्यान्हवृत्तारोहण करील तितका त्या तारेचा **विषुव** काल होय वर निर्दिष्ट केल्याप्रमाणें **संपात** किंवा स्थिर नक्षत्रें ह्यांचे मानानें पाहतां. सूर्य रोज ३ मिनिटें ५६ सेकंद इतक्या उशीरानें याम्योत्तर वृत्तावर येतो. ह्याचाच अर्थ असा कीं, सूर्याचें विषुवांश **मध्यमगतिप्रमाणें** रोज ३ मिनिटें ५६ सेकंद इतकें वाढतात.

आतां स्पष्ट सूर्योदय साधण्यासाठीं चर संस्कार केला पाहिजे त्याची साधनें **(कोटिज्या) द्युज्या**, व **क्षितिज्या** (म्हणजे **कुज्या**) हीं कशीं साध्य करावीं तें सांगतात.

क्रान्तेः क्रमोत्क्रमज्येद्वेकृत्वातत्रोत्क्रमज्यया ॥
हीनात्रिज्यादिनव्यासदलंतद्दक्षिणोत्तरम् ॥ ६० ॥

ग्रहाच्या स्पष्ट क्रान्तिपासून त्या क्रान्तिची भुजज्या, उत्क्रमज्या साध्य करून (त्रिज्या उणे उत्क्रमज्या, या सारणिनें) कोटिज्याहि साधावी. अशा रीतिनें स्पष्ट क्रान्तिची जी कोटिज्या तीच **त्या अहोरात्रवृत्ताची** त्रिज्या असते. हिलाच **द्युज्या** म्हणतात. ही दक्षिण गोलांत दक्षिण, आणि उत्तर गोलांत उत्तरेची असते.

स्पष्टीकरणः—उत्क्रमज्या म्हणजे Versed Sine. हिची सारणि 1–Cosine ही आहे. अर्थात् 1–Versed sine = Cosine हें ओघानेंच ठरतें, हेंच सिद्धान्तकार सांगतात. नव्वद अंशांतून दोर्ज्येचें अंश वजा करून जो पूरककोन होईल त्याची भुजज्या तीच पहिल्या कोनाची कोटिज्या हा निर्णय पूर्वीचे ३०।३१ श्लोकांत (ांगितला आहे. त्यांत Sin (180–A) = Sin A हेंहि तत्व प्रथित आहे.

श्लोक ६१ ह्यांत "चर" संस्कार साध्य करण्याची रीति सांगतातः —

क्रान्तिज्याविषुवद्भाघ्नीक्षितिज्याद्वादशोध्दृता ॥
त्रिज्यागुणाहोरात्रार्धकर्णाप्ताचरजासवः ॥ ६१ ॥

ग्रहाची जी स्पष्ट क्रान्ति असेल तिची भुजज्या साधावी; आणि तिला (त्याच स्थलाच्या) **पलभेनें** गुणून (त्या गुणाकारास) बारा (१२) ह्या संख्येनें भागावें. भागाकार येईल तो (तेथील अहोरात्र वृत्ताची) **क्षितिज्या** होईल. नन्तर क्षितिज्येला त्रिज्येनें गुणून द्युज्येनें भागिलें असतां चर–भुजाची **दोर्ज्या** येते. तिच्या (भुजकला) इतके (उदयाचे) चरासु असतात. ६१.

स्पष्टीकरणः—चर साधन ह्या वास्तविक त्रिप्रश्नाधिकाराच्या विषयापैकीं आहे. परंतु स्पष्टीकरणाशीच त्याचा संबंध असल्याकारणानें तो तेथें सांगितला आहे.

ध्रुवतारेकडे लक्ष ठेऊन दक्षिणेकडे चाललें तर ध्रुवतारा खालीं खालीं क्षितिजा कडे उतरूं लागते. शेवटीं असें स्थल येतें कीं, तेथून ध्रुवतारा **क्षितिजाशींच** चिकटलेली (अथवा संलग्न झालेली) दिसेल. ह्या **स्थलाला भूविषुवावरील** स्थल म्हणतात. अशा सर्व स्थलांचा नकाशा पाहतां त्या सर्व स्थलांवरून आकाशांतील विषुववृत्त

जात आहे, असें दिसेल. विषुववृत्तस्थ स्थळांना **निरक्ष** देश म्हणतात. **निरक्षदेशीं** अक्षांश **शून्य** असतात, कारण अक्षांश तेथूनच मोजतात. तेथें **आकाशस्थ** विषुववृत्त प्रेक्षकाच्या **अगदीं नीट डोक्यावरून** एकाद्या **कमानीसारखें**-पूर्व क्षितिजापासून पश्चिमक्षितिजापर्यंत जातें. निरक्ष देशांत–सूर्य ग्रह, व तारा उगवल्यापासून बरोबर १२ तासांनीं किंवा तीस (३०) घटकांनीं मावळतात. केव्हांहि कमीज्यास्त वेळ होत नाहीं. ह्याचें कारण असें कीं, ज्या अहोरात्रवृत्तांतून (म्हणजे विषुवांशीं **समान्तर** अशा अक्ष वर्तुळांतून) रवि, ग्रह व तारे दैनंदिनगतिमुळें फिरतात त्या वर्तुळांचा बरोबर **अर्धाच भाग** निरक्ष प्रदेशीं प्रेक्षकास दिसतो. त्यामुळें दिनमानांत कमीजास्तपणा होत नाहीं. निरक्ष प्रदेशीं **खस्वस्तिक** बिन्दु डोक्यावरील विषुववृत्तांतच असतो. आणि ध्रुवबिंदु क्षितिजांत लीन असतो. निरक्ष देशांतून उत्तरेकडे येऊं लागलें असतां ध्रुवतारा क्षितिजांतून वर वर चढते, आणि विषुवाची कमान दक्षिणेकडे कलते. ध्रुव तारा, जितकी क्षितिजाच्यावर **तितक्याच** मानानें विषुवाची कमान खालीं दक्षिणेकडे झुकलेली असते ध्रुव तारा वर येणें ह्या प्रकाराला तिचें उन्नतांश वाढत चालले असें म्हणतात. प्रेक्षकाचें स्थळ जितके **अंश** विषुवाच्या **उत्तरेस, तितकेच** ध्रुव तारेचे **उन्नतांश.** ह्यावरून नियम ठरला कीं, ध्रुवाचे जे उन्नतांश तितकेच त्या स्थळाचे **अक्षांश.**

उत्तर अक्षांश स्थानीं उत्तरेकडील अहोरात्रवृत्ताचा जो भाग **क्षितिजाच्या** वर दिसतो तो निम्यापेक्षां ज्यास्त दिसतो आणि त्याच मानानें विषुवाच्या दक्षिणेकडील अहोरात्रवृत्तांचा जो भाग दिसतो तो निम्यापेक्षांहि कमी असतो त्यामुळें अक्षांश जितके उत्तरेचे; किंवा ग्रहाची **उत्तर क्रान्ति** जितकी अधिक तितका तो ग्रह क्षितिजाच्यावर बारा तासांपेक्षां ज्यास्त काळ राहील; आणि दक्षिण क्रान्तिचा, किंवा दक्षिण अहोरात्रवृत्तावून फिरणारा ग्रह (उत्तर अक्षांशस्थ) प्रेक्षकास बारा तासापेक्षां कमी वेळ क्षितिजाच्यावर दिसेल. म्हणून आपल्या इकडे उत्तरायणांत दिनमान ज्यास्त, आणि दक्षिणायनांत रात्रिमान जास्त असतें. रवि, चंद्र, ग्रह किंवा तारा हे क्षितिजाच्यावर बारा तासांपेक्षां **जितके ज्यास्त** वेळ राहतील त्या काळाचा जो **निमा भाग** त्याला **चर संस्कार** (काल) म्हणतात.

विषुववृत्ताचा जो आकार आहे त्यापेक्षां अहोरात्र वर्तुळांचा आकार क्रमशः कमी कमी होत होत ध्रुवस्थानीं तो शून्य होतो. तथापि सर्व अहोरात्रवृत्तांचें अक्षपरिभ्रमण ६० घटिका किंवा २४ तासांतच पुरें होतें.

निरक्षदेशीं ध्रुव हा क्षितिजाच्या परिघातच असतो. त्यामुळें पूर्वबिंदु आणि पश्चिम बिन्दु ह्यांच्यामध्यें ध्रुवावून निघून **विषुवाशीं काटकोन** करणारें जें महावृत्त किंवा महावर्तुळ तेंहि **क्षितिजांतच** लीन झालेलें असतें, परंतु जसजसा ध्रुव बिन्दूवर येतो तसतसें व त्याच प्रमाणांत त्याच्याच बरोबर तें विषुवाशीं पूर्व-पश्चिम बिन्दूंत **काटकोन** करणारें

वृत्तहि **वर उचललें** जातें. ह्या महावर्तुळाला **उन्मंडल** म्हणतात. **उन्मण्डलाच्या** आंत अहोरात्रवृत्ताचा जो भाग असतो तो **बरोबर निमा** असतो.

उत्तर अक्षांशप्रदेशांत अहोरात्रवर्तुळाचा जो अर्ध्यापेक्षा जास्त भाग दृष्टीच्या टप्प्यांत येतो, त्यापासूनच चर-भुज साध्य होतो. तो जास्त भाग उन्मडंलाच्याहि पलिकडे क्षितिजापर्यंतच दिसावयाचा. उत्तर अक्षांशात हा तुकडा क्षितिजाच्या **वर** दिसतो. **उन्मण्डल** *आणि* **क्षितिज** *ह्यांच्या मधील जो* **अहोरात्र**वृत्ताचा (*किंवा अक्षांश वर्तुळाचा*) तुकडा **त्यालाच क्षितिज्या** म्हणतात. ही क्षितिज्या दक्षिण गोलांत म्हणजे विषुवाच्या दक्षिणेकडील प्रदेशांत क्षितिज्याच्या **खालीं** असते.

मध्यान्हवृत्त किंवा मुख्य याम्योत्तरवृत्त ह्यांच्या योगानें खस्वस्तिकामध्यें **अहोरात्र वृत्ताच्या** दृश्य भागाचे बरोबर दोन सारखे तुकडे पडतात; एक पूर्वविभाग आणि दुसरा पश्चिम विभाग. हा प्रत्येक तुकडा अहोरात्रवृत्ताच्या चतुर्थांशाइतका असतो.

चरसाधनाचा प्रकार सिद्धान्तगणितांत आणि आधुनिक पाश्चात्य गणितांत अगदीं एकसारखाच आहे.

$\frac{\text{पलभा}}{\text{१२ अंगुळें}}$ म्हणजे $\frac{\text{Shadow}}{\text{12 Digits}}$ = Tangent Latitude.

द्युज्या म्हणजे क्रान्तिची कोटिज्या (Consine Declination) हें वर सांगितलेंच आहे.

आणि $\frac{\text{क्रान्तिज्या} \times \text{पलभा}}{\text{१२}}$ = क्षितिज्या; म्हणून क्षितिज्या × त्रिज्या ÷ द्युज्या= चर-ज्या.

Ascensional Diff. क्रान्तिज्या = Sin Declinatton

$\therefore \frac{\text{Sin Declination} \times \text{Shadow}}{\text{Cos Declination} \times 12}$ = Sine Ascensional Difference.

$\therefore$ Tan Declination × Tan Latitude = Sin Ascensional Difference.

वरील पद्धतीचें त्रैराशिक असें:—

१२ अंगुळ कोटिमध्यें : जर अमुक पलभा : : तर द्युज्येला म्हणजे क्रान्ति कोटीला किती ? उत्तर; **क्षितिज्या**;

पुन: त्रैराशिक:—

अमुक द्युज्येला : जर अमुक क्षितिज्या : : तर त्रिज्येला किती : याचें उत्तर; **चरज्या**

विषुववृत्तस्य स्थळीं (म्हणजे निरक्षदेशीं) जे रवि–चन्द्र–ग्रह; नक्षत्रादिकांचें **उदय-काल** होतात त्यांना **लङ्कोदय** अशी संज्ञा आहे.

राशींचा मध्यान्हवृत्तलंघनकाल हा सर्वत्र लंकोदयाशीं **समान असतो;** कारण उन्मण्डल आणि मध्ययाम्योत्तर म्हणजे माध्यान्हवृत्त) ह्यांतील अन्तर सर्वत्र सारखेंच असतें.

तत्कार्मुकमुदक्क्रान्तौधनहानीपृथक्स्थिते ॥
स्वाहोरात्रचतुर्भागेदिनरात्रिदलेस्मृते ॥ ६२ ॥

याम्यक्रान्तौविपर्यस्तेद्विगुणेतुदिनक्षपे ॥
विक्षेपयुक्तोनितयाक्रान्त्याभानामपिस्वके ॥ ६३ ॥

... चरज्याचें धनु करून त्याचें असु करावे तें असु अहोरात्राच्या चतुर्थांशांत क्रान्ति उत्तर असल्यास मिळवावें म्हणजे (उदगयनांतील) दिनार्ध येतें (त्यावरून दिनमान कळेल). वजा केलें असतां रात्र्यर्ध येईल. ६२.

क्रान्ति दक्षिण असल्यास उलट संस्कार करावा (अहोरात्र चतुर्थांशांत) वजा करावें आणि रात्र्यर्धांत मिळवावें.

नक्षत्रांचीहि स्पष्ट क्रान्ति काढून हाच चर संस्कार केला असता त्यांचाहि उदयास्तकाल काढतां येतो. ६३.

स्पष्टीकरणः—सूर्य ज्या सायन राशींत असेल त्या राशीच्या उदयासुवरून चरज्येचें असु येतात. सामान्य रीत्या **चरभुजाच्या** जितक्या कला तितकेंच असु मानल्यासहि हरकत नाहीं. **क्षितिज्या** उत्तर गोलांत अधिकाधिक दृग्गोचर होते. म्हणून **निरक्ष** दिनार्धांत चरासु मिळवावें. येथें अहोरात्राचा चतुर्थांश सांगितला तो निरक्ष दिनार्ध होय.

चंद्र, ग्रह, ग्रह आणि नक्षत्रें ह्यांचा रवि सापेक्ष उदय काढावयाचा तर प्रथम त्यांच्या विषुवांशांत रविचें विषुवांश वजा करावें. आणि त्यावेळेपासून दिनार्ध साधावें.

भभोगोऽष्टशतीलिप्ताःखाश्विशैलास्तथातिथेः ॥
ग्रहलिप्ताभभोगाप्ताभानिभुक्त्यादिनादिकम् ॥ ६४ ॥

—स्थिर नक्षत्राचा भोग (अ० स्थिर नक्षत्रांचा विभाग) ८०० कलांचा आहे तिथीचा विभाग ७२० कलाचा. (म्हणजे रवि चंद्रांचें अन्तर ७२० कलांइतकें झालें कीं तिथी पूर्ण होते) ग्रहांचा जो राशीभोग त्याच्या कला करून त्यांना ८०० नीं भागिलें असतां भागाकार अश्विन्यादि गत नक्षत्रसंख्या दर्शवितो. बाकी रहाते ती वर्तमान नक्षत्राच्या भुक्तकला. भुक्तकला ८०० कलांतून वजा केल्यास **भोग्य** कला किती राहिल्या तें कळेल. ग्रहाच्या दिनगतिवरून त्रैराशिकानें भुक्त आणि भोग्यदिन काढतां येतात. ६४.

स्पष्टीकरणः—उदयास्तादि आक्रमवृत्तस्य स्थितीचा संबंध विषुव आणि आक्रम ह्यांच्या परस्पर गुंतागुंतीचा असल्याकारणानें ग्रहगतिचे गणित संपातकोनाच्या त्रिकोणावरून निष्पन्न होतें म्हणूनच उदयास्तादि आणि ऋतुचक्रादि हे **सायन** असतात परंतु स्थिरनक्षत्रांचे राशीपुञ्ज हे निश्चल असल्यानें नक्षत्रविभाग आणि राशिविभाग हे **निरयन** घेतले पाहिजेत. आपल्या पंचांगांत नक्षत्रांशीं संबंध असलेल्या गोष्टी सर्व **निरयन**च असतात. आणि नक्षत्र चक्राचा आरंभ रेवती पुंजातील निःशर तारेपासून होतो. रविचन्द्रांचें अन्तर ३६० अंश किंवा २१६०० कला झालें म्हणजे ३० तिथि होतात. अर्थात् एका तिथींत ७२० समाविष्ट असतात.

रवीन्दुयोगलिप्ताभ्योयोगाभभोगभाजिताः ॥
गतागम्याश्चषष्टिघ्नाभुक्तियोगाप्तनाडिकाः ॥ ६५ ॥

श्लोक ६५—रविच्या भोगकला आणि चन्द्राच्या भोगकला ह्यांच्या बेरजेस ८०० कलांनीं भागून भागाकार येईल ती संख्या विष्कंभ इत्यादि योगांची झाली बाकी राहील ती वर्तमान योगांच्या भुक्तकला. त्या ८००तून वजा केल्यास बाकी राहील त्या भोग्य कला. [आठशें (८००) कला भोग होण्यास ६० घटका लागतात म्हणून] भुक्त-भोग कलांना ६० नी गुणून ८००नें भागिलें असतां योगाच्या भुक्त-भोग्य घटिका समजतील.

अर्कोनचन्द्रलिप्ताभ्यस्तिथयोभोगभाजिताः ॥
गतागम्याश्चषष्टिघ्नानाड्योभुक्त्यन्तरोध्दृताः ॥ ६६ ॥

श्लोक ६६—चन्द्राच्या भोगकलांमध्यें रविच्या भोगकला वजा कराव्या [म्हणजे रवि-चन्द्राचें अन्तर येईल त्यास] तिथभोगकलांनीं भागिले म्हणजे भागाकार गततिथींची संख्या दर्शवितो. बाकी राहते त्या भुक्तकला. भुक्त-भोग्य कलांना ६० नीं गुणून ७२० कलांनीं भागिलें म्हणजे चालू तिथीच्या भुक्त भोग्यघटिका येतात. ६६.

करण म्हणजे **अर्धातिथी** करणाचे दोन प्रकार आहेत. स्थिर–करणें, चल–करणें प्रथम स्थिरकरणें सांगतात.—

ध्रुवाणिशकुनिर्नागंतृतीयंतुचतुष्पदम् ॥
किंस्तुघ्नंतुचतुर्दश्याःकृष्णायाश्चापरार्धतः ॥ ६७ ॥
बवादीनिततःसप्तचराख्यकरणानिच ॥
मासेऽष्टकृत्वएकैकंकरणानांप्रवर्त्तते ॥ ६८ ॥

कृष्णपक्षातील १४ दर्शीच्या उत्तरार्धाला **शकुनि** करण म्हणतात. अमावास्येच्या पूर्वार्धी **नाग**-करण; उत्तरार्धीं **चतुष्पद**; आणि प्रतिपदेच्या पूर्वार्धीं किंस्तुघ्न ह्याप्रमाणें चार करणें अगदीं ओळीनें येतात. ६७.

नंतर शुक्ल प्रतिपदेच्या उत्तरार्धापासून कृष्णचतुर्दशीच्या पूर्वार्धापर्यंत **बव** आदि सात करणें पुन पुनः ह्याप्रमाणें आठ वेळां येतात. म्हणूनच तीं **चर** करणें होत. एका चान्द्र मासांत सात करणाची आठवेळ पुनरावृत्ति होते. ६८.

तिथ्यर्द्धभोगंसर्वेषांकरणानांप्रकल्पयेत् ॥
एषास्फुटगतिःप्रोक्तासूर्यादीनांखचारिणाम् ॥ ६९ ॥

तिथिचा अर्धभोग म्हणजे एक करण होते हा नियम सर्व करणाना लागू आहे. ह्याप्रमाणें हे मयासुरा, रवि-चंद्र आणि ग्रह ह्याच्या स्थिति आणि गति स्पष्ट करण्याची रीति तुजला ह्या अध्यायांत सांगितली आहे. ६९.

स्पष्टाधिकार समाप्त.

(त्रिप्रश्नाधिकाराची भूमिका.)

स्पष्टगणिताची **भूमिका** अथवा पाया पाहता आकाश गोलाचें ज्ञान आणि आकाशस्थ गोलाचे वेध घेण्याची करामत हा आहे आकाशाचा गोल किंवा आंतील तारकापूर्ण निळी पोकळी निरनिराळ्या ठिकाणाहून निरनिराळ्या स्थितिची दिसते. तरी त्या स्थितिच्या दृश्यांतहि कांहींतरी सारखेपणा आहे. पहिली गोष्ट **क्षितिज** ही होय प्रत्येक भूभागाची **दृश्यमर्यादा** क्षितिज ही आहे ठिकाण जरा किंचित बदललें तरी क्षितिजहि बदलतें परतु **त्याचा कोणताहि भाग नष्ट होत नाहीं.** क्षितिज अखण्ड आहे दुसरी गोष्ट म्हणजे क्षितिजाचा मध्यबिन्दू क्षितिज हें वर्तुळ आहे त्याचा मध्यबिन्दू प्रेक्षक उभा आहे तीच जागा, आणि त्याच्या अगदीं **डोक्यावरचा आकाशातील बिन्दू.** त्याला **ख-स्वास्तिक** म्हणतात त्याची खूण **"ख"** हें अक्षर होय. ग्रहगणिताचा सबंध आकाशाशीं असल्याकारणानें क्षितिजाचा मध्यबिन्दू आकाशातीलच घेतला पाहिजे क्षितिज म्हणजेच भूक्षितिज आणि आकाश ह्याचे ऐक्य म्हणून भूक्षितिज आणि आकाशक्षितिज हें एकच अर्थात् क्षितिजाचा मध्यबिन्दू आकाशातहि असणार ह्याला "ख-मध्य" असेंहि म्हणतात. ग्लासातील किंवा बाटलीतील पाण्याची पाणसळ (लेव्हल) ज्याप्रमाणें **तीच कायम,** मग तो ग्लास किंवा शिशी तुम्ही उभी, कलती, आडवी वाटेल तसी ठेवा, त्याप्रमाणें आकाश गोल वाटेल त्या स्थितींत असला तरी क्षितिजाची पाणसळ केव्हांही (लेव्हल) तीच.

आकाशाची रूपरेषा चित्रित करतांना प्रथमवर्तुळ काढावयाचें, कारण आकाश ही एक गोल पोकळी आहे म्हणून वर्तुळाच्या मध्यबिन्दूतून जाणारी एक व्यास रेषा (पाणसळींत)काढावी. हेंच क्षितिज (आकृति पहा.) तींत क्षि ति(-ज) रेषेने क्षितिज दाखविलें आहे वर्तुळाच्या कमानदार परिघाच्या शिरोभागीं **"ख"** हा **खस्वास्तिक** बिन्दू दाखविला आहे ज्या आकृतिमध्यें **क्षितिज** दाखविलें असतें अशी कोणतीहि आकृति **नेहमी** ह्याच स्वरूपात असावयाची. त्यांत बदल नाहीं निरनिराळ्या स्थलानुरोधानें क्षितिज व खमध्य ह्यांच्या **अपेक्षेनें** ताऱ्याचें स्थान आकृतिमध्यें बदलेलें दिसेल परतु **क्षितिज** आणि **खमध्य** ह्यांची स्थिति आकृतिमध्यें केव्हांहि बदलणार नाहीं.

निरक्ष देशांत (म्हणजे विषुववृत्ताखालील भू प्रदेशांत) गेलें असतां विषुव हे प्रेक्षकाच्या **डोक्यावर** पूर्वपश्चिम **कमानी** सारखें दिसेल तीच कमान आकृति मध्यें दाखविली आहे खमध्य अर्थातच त्याच्याच ठिकाणीं असणार पण विषुववृत्त हें मात्र खमध्यातून पूर्वपश्चिम जातें असें दिसेल, म्हणूनच विषुवापासून नेहमीं नव्वद अंशावर असणारे ध्रुव बिन्दू हें क्षितिजांतच दिसतील. विषुववृत्ताशीं समान्तर अशीं जीं अक्षांश वृत्तें– (ज्याना अहोरात्रवृत्तें हि म्हणतात.) तीं मात्र **निरक्षदेशीं** क्षितिजाशीं काटकोनात आहेत असें आढळेल.

विषुव हें (निरक्षदेशीं) खमध्यांतून पूर्वपश्चिम जातें म्हणून त्याच पातळींत सपाट, भूमिवर सरळरेषा काढली तर तीहि त्याच्या पूर्व-पश्चिम बिन्दूतूनच जाईल. हे पूर्व-पश्चिम बिन्दू कोठल्याहि ठिकाणाहून पाहिले तरी क्षितिजामध्येंच असणार. आकृति मध्यें त्यातील क्षितिजामध्यें "ध्रु"

(९) "ख-"पूर्व ह्या ऊर्ध्वरेषेशीं समान्तर असें लम्ब प्रत्येक अहोरात्र वृत्ताच्या याम्योत्तरातील छेदबिन्दूपासून क्षितिजापर्यंत काढतां येतात. ह्यांचा **अहोरात्राशीं** याम्योत्तरामध्यें जो कोन होतो ते **अक्षांश** अर्थात् जेव्हां **विषुवच** खमध्यातून जातें, किंवा क्षितिजाशीं एकरूप असतें; तेव्हां अहोरात्र वृत्ताचा ह्या लम्बाशीं कोनच होत नाहीं. म्हणून तेव्हां अक्षांशशून्य किंवा नव्वद असतात.

ह्या प्रमाणें अक्षांश-निदर्शक असे जे जे कोन होतात त्यांचा विचार ह्या त्रिप्रश्नाधिकारांत केला आहे.

खस्वस्तिकांतून क्षितिजाच्या (म्ह० क्षितिजवर्तुळाच्या) प्रत्येक अंश (कला) पर्यंत काल्पिलेलीं जीं क्षितिजाशीं लम्बरूप वर्तुळें त्यांना दिङ्मण्डलें म्हणतात. तीं आकृतीमध्यें दाखविलीं आहेत.

विषुवाला जशीं ध्रुवप्रोत वर्तुळें लम्ब, त्याप्रमाणें क्षितिजाला दिङ्मण्डलें लम्बरूप असतात.

तारा, ग्रह आणि रवि-चन्द्र हे पृथ्वीच्या दैनंदिन-(अक्ष) भ्रमणामुळें दररोज कोणत्यातरी आहोरात्र वृत्तावून (अथवा विषुव)–समान्तर वृत्तांतून पूर्व-पश्चिम भ्रमण करितात. ह्यामुळेंच स्थिरनक्षत्राचा नाक्षत्रदिन आणि रविचा **सावनदिन** हे अनुभवास येतात. सावनदिन हाच आपला व्यावहारिक दिवस असतो.

स्थिरनक्षत्रांना गति नसल्यानें तीं **बरोबर** समान्तर वृत्तांतूनच फिरतात.

(क) परंतु-रवि-चन्द्र आणि ग्रह ह्यांना स्वतःची गति (अहोरात्रवृत्ताशीं न जमणारी अशी) असतें त्या कारणानें ते ज्या अहोरात्रावृत्तावर क्षितीजांतून वर येतात **त्याच** अहोरात्र वृत्तावर ते मावळत नाहींत. ही गति हिशेबांत घेऊन त्यांचें स्थान ठरवावें लागतें.

तथापि नुसत्या उपपत्तीच्या दृष्टिनें ह्यांची गति हिशेबांत घेण्याचें कारण नाहीं, फक्त रवि-चन्द्र त्याच आहोरात्र वृत्तावून फिरत नाहींत येवढें ध्यानांत असलें म्हणजे पुरे.

सूर्य दररोज कोणत्याना कोणत्यातरी अहोरात्र (म्हणजे विषुव समान्तर) वृत्तांतून फिरतो. म्हणून सपाट (पाणसळ) जमीनीवर एक लोह-कील **अगदीं उभा** (लम्ब) असा रोंवून ठेवला तर त्याची छाया सूर्याच्या **उलट** बाजूकडे सकाळपासून संध्याकाळपर्यंत कोठेना कोठेंतरी पडेलच.

ही छाया सूर्य उगवतांच प्रथम पश्चिमेकडे लांबवर पसरलेली पडते, नंतर सूर्य जसजसा वर चढत जातो तसतशी कमी कमी होत सूर्य मध्यान्हीं आला म्हणजे छाया (त्या दिवसाच्या मानानें) अगदी कमीहोते. नतर मध्यान्ह उलटल्यावर ती छाया पुनः वाढू लागते आणि अस्ताच्या वेळीं पुनः लांबच लांब अशी (परतु सकाळच्या छायेच्या) अगदी उलट दिशेकडे पसरते.

(ख) म्हणून दररोज किंवा चार चार दिवसांनीं सूर्याची छाया मध्यान्हाच्या थोडावेळ आगोदर आणि नतर थोडावेळ पर्यंत अशी जमीनीवर चिन्हित केली म्हणजे दररोजच्या कमीत कमी छायेचा बिन्दू कोणता तें बिनचूक समजेल. आणि मध्यान्हवृत्त अथवा मुख्य याम्योत्तर हें न बदलणारें असल्यानें यावरून याम्योत्तराची दिशा सूक्ष्मपणें निश्चित होईल.

हे ध्रुवबिन्दु आणि "ख" हा विपुवाच्या कमानीचाहि मध्य आहे. विपुव हें पूर्वपश्चिम असल्यानें त्याची पूर्वबाजूची कोर "ख-पू" ह्या लम्बरेषेनें दाखविली आहे. विपुवाशीं जी समान्तर अक्षवृत्तें तींहि अर्थात्च लम्बरेषानीच दाखविली जातात. जो कोन विपुवाचा क्षितिजाशीं असतो अक्षांशवृत्तांचा किंवा अहोरात्रवृत्ताचाहि क्षितिजाशीं असेल. ध्रुव बिन्दू हें क्षितिजांतच जिरलें असल्यानें ध्रुवबिन्दूतून निघून विपुवाशीं काटकोन करणारी जीं ध्रुवसूत्रवृत्तें त्यापैकीं पूर्वबिन्दूतून जाणारें जें वृत्त तेंहि क्षितिजाशीच एकरूप झालेलें असतें.

ही आकृति निरक्षदेशाची झाली. तेथें विपुवाच्या कमानीचा मध्य आणि खमध्य हे एकच असल्यानें तेथें क्रान्ति शून्य असें समजतात म्हणूनच तो निरक्षदेश. विपुवाच्या एक अंशउत्तरेकडे गेलें म्हणजे विपुवाच्या कमानीचा मध्य आणि खमध्य ह्यांत एक अंशाचें अन्तर पडेल; म्हणजे विपुवाची कमान खमध्याच्या दक्षिणेकडे एक अंश झुकलें; आणि ध्रुव बिन्दु क्षितिजापासून एक अंश वर उचलून येईल. विपुवाच्या कमानीच्या दक्षिणेकडे जितक्या अंशांचा झुकाथा, तितकाच उत्तर ध्रुवबिन्दू क्षितिजापासून वर उचललेला. म्हणून त्या स्थलाचे तितकेच अक्षांश अशीं परिभाषा ठरली आहे. विपुव दक्षिणेकडे १९ अंश झुकलें (म्हणजे विपुवाचे दक्षिण नतांश १९ झाले) तर उत्तर ध्रुव बिन्दु १९ अशाच क्षितिजाच्या वर उचललेला दिसेल. असें झालें म्हणजे त्या स्थळाचे अक्षांश उत्तरेचे १९ अंश असें सांगावें ही पद्धति वर सांगितलीच आहे. जशी विपुवाची कमान निरक्षदेशीं खमध्यातून जात होती, त्याचप्रमाणे ध्रुवबिन्दूवर उचलतां उचलतां आणि विपुव खाली झुकतां झुकतां क्षितिजाशीं टेकलें कीं ध्रुव बिन्दू खमध्याशीं मिळतो. म्हणजे त्या ठिकाणचे अक्षांश ९० होऊन ध्रुवबिन्दू डोक्यावर येतो, विपुव आणि क्षितिज एकत्र होतें, आणि अहोरात्र वृत्तें क्षितिजाशीं समान्तर राहतात. ही स्थिति आकृति मध्यें दिसेल.

आकृतिमध्यें निश्चित गोष्टी अशा दिसतातः—

(१) क्षितिज रेषा ही नेहमीं आडवी (पाणसळींत) असतें.

(२) 'ख' आणि पूर्व-बिन्दू ह्यांना सांधणारी रेषा क्षितिजाशी लम्ब असून ती क्षितिजरेषेच्या मधोमध असतें.

(३) अहोरात्रवृत्तें अथवा अक्षांशवृत्तें विपुवाशीं समान्तर असतात.

(४) ध्रुववृत्तें हीं विपुवाशीं आणि अहोरात्र वृत्ताशीं काटकोनच करितात.

(५) पूर्वबिन्दूतून जाणारें जें ध्रुव-सूत्र किंवा ध्रुववृत्त त्याला उन्मण्डल म्हणतात; आणि "ख" स्वस्तिकांतून जाणारें जें ध्रुवसूत्र तें दक्षिणोत्तर अथवा याम्योत्तर होय.

(६) जितके विपुवाचे नतांश तितकेच ध्रुवाचे उन्नतांश आणि तितकेच त्या स्थलाचे अक्षांश.

(७) उन्मण्डलाचा क्षितिजाशी किंवा, विपुवाच्या कमानीचा ख-मध्याशीं जो कोन तेच अक्षांश. (असें आकृतीच्या योगानें स्पष्ट दिसतें).

(८) वर (२) मध्यें दर्शविलेली जी " ख- " पूर्वबिन्दूरूप लम्बरेषा तिच्याशीं अहोरात्रवृत्तांचा जो कोन तेंहि अक्षांश.

(९) "स-"पूर्व ह्या लम्बरेषेशीं समान्तर असे लम्ब प्रत्येक अहोरात्र वृत्ताच्या याम्योत्तरातील छेदबिन्दूपासून क्षितिजापर्यंत काढतां येतात. ह्यांचा अहोरात्राशीं याम्योत्तरामध्यें जो कोन होतो ते अक्षांश अर्थात् जेव्हां विषुवच समध्यातून जातें, किंवा क्षितिजाशीं एकरूप असतें; तेव्हां अहोरात्र वृत्तांचा ह्या लम्बाशीं कोनच होत नाहीं म्हणून तेव्हां अक्षांशशून्य किंवा नन्वद असतात.

ह्या प्रमाणें अक्षांश निदर्शक असे जे जे कोन होतात त्यांचा विचार ह्या त्रिप्रश्नाधिकारांत केला आहे.

खस्वस्तिकांतून क्षितिजाच्या (म्ह० क्षितिजवर्तुळाच्या) प्रत्येक अंश (कला) पर्यंत काल्पिलेलीं जीं क्षितिजाशीं लम्बरूप वर्तुळें त्याना दिङ्मण्डळें म्हणतात. तीं आकृतीमध्यें दाखविलीं आहेत

विषुवाला जशीं ध्रुवप्रोत वर्तुळें लम्ब, त्याप्रमाणें क्षितिजाला दिङ्मण्डळें लम्बरूप असतात.

तारा, ग्रह आणि रवि-चन्द्र हे पृथ्वीच्या दैनंदिन–(अक्ष) भ्रमणामुळें दररोज कोणत्यातरी आहोरात्र वृत्तातून (अथवा विषुव)–समान्तर वृत्तांतून पूर्व-पश्चिम भ्रमण करितात. ह्यामुळेंच स्थिरनक्षत्राचा नाक्षत्रदिन आणि रविचा सावनदिन हे अनुभवास येतात. सावनदिन हाच आपला व्यावहारिक दिवस असतो.

स्थिरनक्षत्रांना गति नसल्यानें तीं बरोबर समान्तर वृत्तांतूनच फिरतात.

(क) परंतु-रवि-चन्द्र आणि ग्रह ह्यांना स्वतःची गति (अहोरात्रवृत्तांशीं न जमणारी अशी) असतें त्या कारणानें ते ज्या अहोरात्रावृत्तावर क्षितीजावून वर येतात त्याच अहोरात्र वृत्तावर ते मावळत नाहींत. ही गति हिशेबांत घेऊन त्यांचें स्थान ठरवावें लागतें

तथापि नुसत्या उपपत्तीच्या दृष्टिनें ह्यांची गति हिशेबात घेण्याचें कारण नाहीं, फक्त रवि-चन्द्र त्याच आहोरात्र वृत्तांतून फिरत नाहींत येवढें ध्यानांत असलें म्हणजे पुरे

सूर्य दररोज कोणत्याना कोणत्यातरी अहोरात्र (म्हणजे विषुव समान्तर) वृत्तांतून फिरतो. म्हणून सपाट (पाणसळ) जमीनीवर एक लोह-कील अगदीं उभा (लम्ब) असा रोंवून ठेवला तर त्याची छाया सूर्याच्या उलट बाजूकडे सकाळपासून सध्याकाळपर्यंत कोठेना कोठेंतरी पडेलच

ही छाया सूर्य उगवतांच प्रथम पश्चिमेकडे लांबवर पसरलेली पडते, नंतर सूर्य जसजसा वर चढत जातो तसतशी कमी कमी होत सूर्य मध्यान्ही आला म्हणजे छाया (त्या दिवसाच्या मानानें) अगदीं कमीहोते नंतर मध्यान्ह उलटल्यावर ती छाया पुन वाढू लागते आणि अस्ताच्या वेळीं पुन लांबच लांब अशी (परंतु सकाळच्या छायेच्या) अगदीं उलट दिशेकडे पसरते.

(ख) म्हणून दररोज किंवा चार चार दिवसांनी सूर्याची छाया मध्यान्हाच्या थोडावेळ आगोदर आणि नंतर थोडावेळ पर्यंत अशी जमीनीवर चिन्हित केली म्हणजे दररोजच्या कमीत कमी छायेचा बिन्दू कोणता तें बिनचूक समजेल. आणि मध्यान्हवृत्त अथवा मुख्य याम्योत्तर हें न बदलणारें असल्यानें यावरून याम्योत्तराची दिशा सूक्ष्मपणें निश्चित होईल.

अक्षांशकोनाच्या विचाराप्रमाणें छायेचा विचारहि त्रिप्रश्नाधिकारामध्यें येतो.

छायासाधन हें सूर्यचन्द्रांच्या प्रकाशांत करता येतें आणि ज्यांच्या जवळ **तिरोवीक्षण** (दुर्बीण) नसेल त्यांना छायासाधनासारखें **कमीखर्चाचे** परंतु सूक्ष्म आणि निश्चित असें दुसरें साधन नाहीं

ह्यांत चूक असण्याचा संभव येवढाच कीं, भूभाग **अगदीं सपाट** असा करता आला पाहिजे आणि तिच्यामध्यें अगदी सरळ बारीक **लोहकील** पूर्णपणें ओळम्यात राहील असा बसला पाहिजे.

परंतु ही अडचण तिरोवीक्षणाना (दुर्बीणीनाहि) लागू आहेत.

(ग) दुसरें साधन क्षितिजापासूनचे उन्नतांश, किंवा ख मध्यापासूनचे नतांश मोजतां येईल असें **नतोन्नत** यन्त्र हें काम तुरीय यन्त्रानेंहि होतें

मोठमोठ्या वेधशाळांतून हें काम भित्तियन्त्रानें किंवा **अधिक्रमण** यन्त्रानें दुर्बीणीनें करितात

वेध घ्यावयाचीं प्राथमिक साधनें (अधिक्रमणयत्र आणि अग्रामापनयत्र, आणि त्याहिपेक्षां सुलभ अशीं) छायायत्र. नतोन्नतयन्त्राविषयीं वर्णन देण्यापेक्षां तें पाहण्यानेंच त्याची सुगमता लक्षात येईल.

छायेनें रविचन्द्राचे नतांश कळतात उभ्या लोहकीलाचें टोंक (तें आकाशाला भिडेल तों पर्यंत उंच वाढविलें अशीं कल्पना केल्यास) खस्वस्तिकाला टेकेल. अर्थात् तो लहानसा भूमिच्या सपाटीला लम्ब असतो. त्याची उंची कोणत्याहि मापानें **बारा** धरावयाची. मग बारा अङ्गुळें, बारातसू, (बारा इंच) काय वाटेल तें माप घ्या अशा दृष्टीने आकृति (पहा) पाहिल्यास लोहकीलाची छाया कशी पडते तें लक्षात येईल त्या आकृतिमध्यें लोहकील ही निश्चित उंची कील रोंवला आहे तेथें क हा काटकोन **छाया** (म्हणजे तिची लांबी) हा भुज आणि रविकिरण हा कर्ण असल्यानें न क या हा काटकोनी छाया त्रिकोण झाला **छाया** हें प्रमाण बिनचूक समजतें. व तो लोहकील प्रमाणांक "न" ह्या कोनाची स्पर्शरेषा होतो व त्याकारणानें "न" कोनहि कळतो "ख" मध्यापासून रवि झुकता असल्यानें "न" कोन हा रविचा नतांश कोन होय आणि रवि ज्या दिवशीं विपुवावर असेल त्या दिवशीच्या छायेनें विपुवाचे नतांश कळतात व (६) प्रमाणें तेच अक्षांश असतात.

ह्याप्रमाणें मध्यान्हछायेनें **खगोलांतील** अनेक काटकोन त्रिकोणाचीं मानें समजतात. आणि त्रिप्रश्नाधिकाराचा हेतूहि तोच आहे अशा त्रिकोणामध्यें कोणत्या तरी एका कोनाच्या टोकाशीं **स्पष्टग्रह** असतो म्हणून स्पष्टग्रह साधना नतरच त्रिप्रश्नाधिकार घेतला **त्रिप्रश्न** म्हणजे तीन मुख्य साधनें तीं **काल,** दिक् आणि प्रेक्षकाचें किंवा आकाशस्थज्योतिचें स्थान ह्याचे **परस्पर संबंध** निश्चित करणें हेंच त्रिप्रश्नाधिकाराचें उद्दिष्ट आहे

प्रमेयें.

भूमितिची जीं प्रमेयें अभ्यासकास उत्तम अवगत आहेत असें सिद्धांतकार समजतात त्यापैकीं कांहीं प्रमेयें.

(१) एकाच वर्तुळाच्या सर्व त्रिज्या परस्परांशीं (लांबीच्या दृष्टीनें) तंतोतंत बरोबर असतात.

(२) निश्चित परिमाणांतील कोन त्याच जातीच्या परिमाणांतील कोनांशीं बरोबर असतात. उदाहरणार्थ कोणत्याहि समभुज त्रिकोणाचा कोणताहि कोन एका काटकोनाच्या $\frac{2}{3}$ असतो.

कोणत्याहि चौरसाचा (म्हणजे काटकोन समभुज चौकोनाचा) प्रत्येक कोन हा काटकोन असतो;

(३) सर्व काटकोन परस्परांशीं बरोबर असतात.

(४) समान्तरचौकोनाच्या समोरासमोरील बाजू परस्परांशीं बरोबर असतात. तसेच समोरासमोरील कोन बरावर असतात.

(५) सरळरेषानी परस्परांचा छेद केल्यास (छेदाच्या ठिकाणीं होणाऱ्या चार कोनांपैकीं) समोरा समोरील कोन परस्पराशीं बरोबर असतात.

ह्या कोनांस **अभिमुख** (opposite) कोन म्हणतात.

(६) समान्तर चौकोनाचेपरस्परांच्या समोरील (म्ह० परस्पराभिमुख) कोन सरळ रेषेनें जोडले म्हणजे त्या रेषेला **आयाम** (Diagonal) म्हणतात.

ही आयाम-रेषा आणि चौकोनाची कोणतीही बाजू यांचा कोन, आणि त्याच बाजूच्या अगदीं समोरची बाजू आणि आयाम. रेषा ह्यांचा कोन, हे परस्परांशीं बरोबर असतात. अशा कोनांना परिवर्ती कोन (Alternate angles) म्हणतात.

(७) एका त्रिकोणाच्या कोणत्याहि बाजू त्याच्याशी समकोन अशा दुसऱ्या त्रिकोणाच्या बाजूशी **अनुक्रमानें** प्रमाणबद्ध असतात. ह्यांना प्रमाण-मित (proportional) बाजू म्हणतात.

(८) कोणत्याहि काटकोनी त्रिकोणांत काटकोनासमोरील (अ) बाजूस **कर्ण** म्हणतात. आणि ज्यांच्यामध्यें काटकोन असतो त्या रेषांना कोनाचे बाहू म्हणतात.

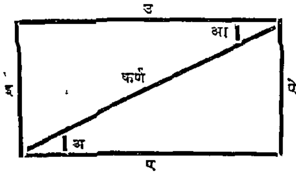
(आ) काटकोन त्रिकोणांतील कोणत्याहि एका बाहूला भुजरेषा अथवा भुजज्या म्हटलेतर दुसऱ्या बाहूला कोटि असें म्हणावयाचें. आणि कोटिला भुजज्या म्हटले तर भुजज्येला कोटि म्हणावयाचे, परंतु

(इ) कर्ण आणि कोणताहि बाहु ह्या मधील कोनाच्या **समोरची** जी बाजू ती **त्याच कोनाची भुजज्या** असते आणि खुद्द त्या कोनाचा बाहु ही **कोटिज्या** ह्यांत मात्र अदलाबदल कधीं व्हावयाचा नाहीं. **कोनाच्या लगतचा बाहु** ही **कोटिज्या** आणि कोनासमोरचा बाहु **भुजज्या**. तेव्हां

(ई) $\text{कर्ण}^2 = \text{भुजज्या}^2 + \text{कोटिज्या}^2$ किंवा

$\text{भुजज्या}^2 = \text{कर्ण}^2 - \text{कोटिज्या}^2$; आणि

$\text{कोटिज्या}^2 = \text{कर्ण}^2 - \text{भुजज्या}^2$.



आ कोनाची भुजज्या. इ
आणि कोटिज्या. उ.

अ कोनाची भुजज्या. ऐ;
आणि कोटिज्या. ए.

भुजज्या कोष्टक

अंश	भुजज्या कला	कोटिज्या कला	उत्क्रमज्या कला	अंश	भुजज्या कला	कोटिज्या कला	उत्क्रमज्या कला
०	०	(३४३८)	०	१९	११२०.७		
१	५८.४			२०	११७५.७९		
२	११६.८९			२१	१२३०.८		
३	१७८.७			२२	१२८९.२५		
३III	(२२५)	(३४२१)	७	२२II	(१३१५)	(३१७७)	२६१
४	२४०.६			२३	१३४४.२५		
५	२९९ १			२४	१३९९.२६		
६	३५९			२५	१४५५.२७		
७	४१९.४			२६	१५०५.८		
७II	(४४९)	(३४०९)	२९	२६I	(१५२०)	(३०८४)	३५४
८	४७७.८			२७	१५६०.८		
९	५३६.३			२८	१६१५.८		
१०	५९२.२			२९	१६६७.४३		
११	६५६.६			३०	(१७१९)	(२९७७)	४६१
११I	(६७१)	(३३७२)	६६	३१	१७७७.५७		
१२	७१५.१			३२	१८२२.१४		
१३	७७३.५			३३	१८७३.७१		
१४	८३१.९			३३III	(१९१०)	(२८५९)	५७९
१५	(८९०.४)	(३३२१)	११७	३४	१९२५.२८		
१६	९४८.८			३५	१९७३.४१		
१७	१००३.९			३६	२०२१.५४		
१८	१०६२.३			३७	२०६९.८७		
१८III	(११०५)	(३२५६)	१८२	३७II	(२०९३)	(२७२८)	७१०

॥ अथ त्रिप्रश्नाधिकारः ॥

शिलातलेऽम्बुसंशुद्धे वज्रलेपेऽपिवासमे ॥
तत्रशंकङ्गुलैरिष्टैः सममण्डलमालिखेत् ॥ १ ॥

प्रथमत. एका घोटींव फरसबन्दीवर किंवा सीमेंट संघला लावून घोटलेल्या चुनेगच्ची जमिनीवर—ती फरसबन्दी अथवा जमीन निखालस **पाणसळींत** आहे अशी अगोदर खात्री करून कांहीं विशिष्ट त्रिज्येनें एक वर्तुळ काढावें. ही त्रिज्या एका लोहकीला इतक्या लांबीची असावी. हा लोहकील (अथवा लोखण्डाची सरळ सळई) सामान्यतः बारा अंगुळे उंचीचा असतो.—(•ह्याला शंकु म्हणतात.) ह्या वर्तुळाला सममण्डल म्हणतात.— १

असा हा लोहकील त्या वर्तुळाच्या मध्यबिंदूत अगदीं सरळ उभा ओळंब्यांत राहील असा रोवावा. [शंकूची उंची कितीहि असली तरी ती " बारा " आहे असे समजून त्या मानानें मोजणी करावी.]

तन्मध्येस्थापयेच्छङ्कुंकल्पनाद्वादशाङ्गुलम् ॥
तच्छायाग्रंस्पृशेद्यत्रवृत्तेपूर्वापरार्धयोः ॥ २ ॥
तत्रबिन्दू विधायोभौवृत्तेपूर्वापराभिधौ ॥
तन्मध्येतिमिनारेखाकर्तव्यादक्षिणोत्तरा ॥ ३ ॥
याम्योत्तरदिशोर्मध्येतिमिनापूर्वपश्चिमा ॥
दिङ्मध्यमत्स्यैः संसाध्याविदिशस्तद्वदेवहि ॥ ४ ॥

लोहकीलाच्या टोकाची छाया मध्यान्हापूर्वी एकदां, आणि मध्यान्हानन्तर एकदां याप्रमाणें दिवसांतून दोन वेळ त्या सममण्डलाला (वर्तुळ परिघाला) जेथें स्पर्श करील, त्या ठिकाणीं बरोबर खुणा करून ठेवाव्या. ह्या खुणा सरळ रेषेनें जोडल्यास ती (सुमाराची) पूर्व-पश्चिम दिशा-दर्शक अशी रेषा होईल. (परंतु तिला क्रांति—संस्कार करावा. तेव्हांच ती बरोबर पूर्वापर दर्शक होईल). ह्या पूर्वापर रेषेला काटकोनांत दुसरी रेषा कंपासानें काढली म्हणजे ती दक्षिणोत्तर दिशा—दर्शक होते.— ३

किंवा प्रथमतः छायेनेंच दक्षिणोत्तर दिशा बरोबर निश्चित करून तिच्यावरून, कंपासानें पूर्वापर रेषा ठरवून घ्यावी. नंतर ह्या चार दिशांच्या मधील दुसऱ्या दिशादि रेषांनीं आखाव्या—४.

स्पष्टीकरणः—दिशासाधन अगदीं बिनचूक होणे हें वेध कृत्याचे प्रथम साधन आहे. ह्यांत कल्पकता आणि सराव ह्याचाच उपयोग आहे. आमच्या अनुभवास असें आलें आहे कीं, पूर्वापर दिशा ठरविण्यापेक्षां दक्षिणोत्तर दिशासाधन करणें हें त्यातलें त्यांत कमी त्रासाचें आहे. शंकूची छाया ही रोज एका विशिष्ट प्रकारची वक्ररेषा दाखविते. त्यांत शंकु मुळापासून जो अत्यंत जवळचा बिन्दू तो दक्षिणोत्तर दिशेंत असतो. याप्रमाणें एक दोन आठवडे हे बिन्दू खुणांनीं ठाम केल्यास याम्योत्तर रेषा बिनचूक सांपडते. होकायंत्रानेंहि दिशासाधन केल्यास स्थूलमानानें दक्षिणोत्तर दिशा समजेल.

सूर्य हा विषुववृत्तावर दोन दिवसांपेक्षां कांहीं कमीच इतका वेळ असतो. बाकीच्या दिवसांत तो विषुवाच्या उत्तरेस किंवा दक्षिणेस असतो म्हणून वर लिहिल्याप्रमाणें सममंण्डल वृत्तावर जरी खुणा केल्या तरी त्यांना जोडणारी रेषा नेमकी पूर्वापर वृत्तावर येत नाहीं. त्यांत थोडें अंतर पडतें; तरी २२ जून आणि २२ डिसेंबर ह्या **अयन संधीच्या-वेळीं** रवीची क्रान्ति अगदीं थोडी असते, त्या वेळीं दिशासाधन केल्यास तें पुष्कळच बिनचूक होईल. इतर दिवशीं क्रान्तिच्या आधिक्यामुळें पूर्वाण्हिचा छायास्पर्श अपराण्हीच्या छायास्पर्श बिन्दूच्या अगदीं नेमका उलट दिशेस नसतो. म्हणून भास्कराचार्यांनीं क्रान्ति-संस्कार सांगितला आहे तो करावा.

चतुरस्रंबहिः कुर्यात्सूत्रैर्मध्याद्विनिर्गतैः ॥
भुजसूत्राङ्गुलैस्तत्रदत्तैरिष्टा प्रभास्मृता ॥ ५ ॥

पूर्वापररेषा आणि याम्योत्तररेषा ज्या ठिकाणीं सममण्डलास छेदन करतात त्या ठिकाणीं त्या वर्तुळास स्पर्शरेषा काढून एक चौरस चौकोन (ज्याच्या बाजू समसमान आणि कोन काट-कोन असा) आखावा. ह्याच चौरसामध्ये शंकूची छाया दररोज **मध्यान्हीं** (सूर्य) नतांशांच्या दोर्ज्ये (sine) इतकी लांब पडेल. तिला **इष्टछाया** म्हणतात.—५.

प्राक्पश्चिमाश्रितारेखाप्रोच्यतेसममण्डलम् ॥
उन्मंडलंचविषुवन्मण्डलं परिकीर्त्यते ॥ ६ ॥

ह्याच पूर्वापर (म्हणजे पूर्वपश्चिम दिशादर्शक) रेषेला **सममण्डल** म्हणतात. पूर्वपश्चिम बिन्दूतून जाणारें जें ध्रुम-प्रोतवृत्त त्याला **उन्मण्डल,** आणि विषुवाला विषुवमण्डल म्हणतात.—६.

रेखाप्राच्यपरासाध्याविषुवद्भाग्रगातथा ॥
इष्टच्छायाविषुवतोर्मध्यमग्राभिधीयते ॥ ७ ॥

मध्यान्हीं शंकुछाया बरोबर याम्योत्तरावरच पडली पाहिजे; आणि अशा रीतीनें याम्यो-त्तरावरील छायाग्र बिन्दूतून पूर्वापर रेषेला समान्तर अशी दुसरी एक सरळरेषा काढली आणि ती सममण्डल वर्तुळाच्या परिघापर्यंत भिडविली तर **पूर्वबिंदू** आणि इतर कोणत्याहि दिवशीची छाया ह्यांच्यातील दक्षिणोत्तर अन्तराला **अग्रा** म्हणतात.

स्पष्टीकरणः—श्लोक ७ ह्याचे पूर्वी श्लोक १२ चें उत्तरार्ध " एवं विषुवती छाया स्वदेशे या दिनार्धजा " ॥ इत्यादि श्लोक पाहिजे होता. कारण **पलभा** म्हणजे काय हें प्रथम सांगितलें पाहिजे. परंतु श्लोकांची उलटापालट झाली आहे असें दिसतें. संदर्भ नसताना " त्रिंशत् कृत्यो युगे भानां चक्रं प्राग् अवलम्बते " हे अयनांशाचे श्लोक आले आहेत ते विलग दिसतात.

सूर्य विषुववृत्तावर येतो **त्याच दिवशीं** लोहकीलाच्या मध्यान्ह छायेची जी अङ्गुलात्मक लांबी ती **पलभा** अशी पारिभाषिक संज्ञा ठरली आहे. विषुवावर **अग्रा** क्रान्ति इतकी असतें, नंतर ती वाढत जाते.

" अग्रा " ह्या संज्ञेला इंग्लिशमध्यें Amplitude म्हणतात.

शङ्कुच्छायाकृतियुतेर्मूलं कर्णोऽस्यवर्गतः ॥
प्रोज्झ्यशङ्कुकृतिंमूलं छायाशङ्कु विपर्ययात् ॥ ८ ॥

[शंकू, तशीच त्याची (मध्यान्ह) छाया, आणि (शकूचें अग्र व छायाग्र) ह्यांना जोडणारें कर्णसूत्र हा एक काटकोन त्रिकोण होतो म्हणून] शकूचा वर्ग आणि छायेचा वर्ग ह्यांच्या बेरजेच्या वर्गमूळाइतकी लांबी छायाकर्णाची असते. तसेंच छायाकर्णाच्या वर्गांतून शकुवर्ग वजा करून राहिलेल्या बाकीच्या वर्गमूळाइतकी छायेची लांबी असते, आणि उलट कर्णवर्गांतून छायावर्ग वजा करून वर्गमूळ काढल्यास शकूची उची निघते.—८.

स्पष्टीकरण:—काटकोन त्रिकोणाचें हें अत्यत महत्वाचें प्रमेय गणितपारावारीण भास्कराचार्य ह्यांनीं *लीलावती*मध्यें क्षेत्रव्यवहाराध्यायात विशद केलें आहे. युरोपात हें प्रमेय युक्लिडनें भूमितीमध्यें पु १ अवि ४८ यात सिद्ध केलें आहे वास्तविक हें प्रमेय काटकोन त्रिकोण, विशालकोन त्रिकोण आणि लघुकोन त्रिकोण ह्यात विभागलें गेलें असून त्या सर्वांचा इत्यर्थ *लीलावती*मध्यें आहे

त्रिंशत्कृत्योयुगेभानांचक्रंप्राक्परिलम्बते ॥
तद्गुणाद्भूदिनैर्भक्ताद्युगणाद्यदवाप्यते ॥ ९ ॥
तद्दोस्त्रिघ्नादशाप्तांशाविज्ञेयाअयनाभिधाः ॥
तत्संस्कृतात्ग्रहात्क्रान्तिच्छायाचरदलादिकम् ॥ १० ॥

ह्यात छायार्क आणि अयनांश ह्यांचा विचार आहे तो असा.—

एका महायुगामध्यें (४३२०००० वर्षांमध्यें) हें (आक्रमवृत्तस्य) नक्षत्रचक (लम्बकाप्रमाणें) पूर्वेकडे सरतें [आणि (पुन मागें हटून) तितकेंच पश्चिमेकडेहि झुकतें] याप्रमाणें त्याचे हेलकावे ६०० होतात. म्हणून ह्या (६००) सख्येनें युगणाला (म्हणजे इष्ट अहर्गणाला) गुणून गुणाकारास महायुगातील सायन दिन सख्येनें भागिलें असता (इतर भगणाप्रमाणें) अशादि भगण येतात. त्याचा भुज करून त्याचे $\frac{3}{10}$ केले म्हणजे अयनाश येतात. स्पष्ट सूर्याला व ग्रहाना ह्याचा सस्कार केल्यावरच त्याची स्पष्ट क्रान्ति, छाया, चरसस्कार, आणि आयन दृक्कर्म इत्यादि प्रकार साध्य होतात

स्पष्टीकरण—अयनांश म्हणजे काय तें येथें सांगितलें वास्तविक सूर्य जसा व्यवहारात निश्चल, स्थिर आहे, त्याप्रमाणें नक्षत्रचक्र हें त्याहिपेक्षा अधिक स्थिर आहे. वस्तुत पृथ्वीच्या अक्ष आन्दोलनानें सपात चलन उत्पन्न होतें. त्याचाच आरोप नक्षत्रचक्रावर केला आहे वास्तविकरणें विषुव मण्डलच मागें सरकतें असें असता **आक्रमवृत्तच** पुढें मागें हेलखावे खाते असें येथें सांगितलें आहे. सपाताचें चलन एकसारखें आक्रमवृत्तांतून **पूर्वेकडून** पश्चिमेकडे सतत चालू आहे. सूर्य एकदां सपातीं आल्यापासून पुन त्याच जागीं येण्याचे अगोदर सपात बिन्दूच सूर्याकडे मागें सरतो त्यायोगानें सांपातिक वर्ष ३६५ दिवस ५ तास ४७ मिनिटें ४९ सेकद, म्हणजे निश्चल नाक्षत्र वर्ष मानापेक्षां २० मिनिटें २० सेकद

इतक्यानें कमी आहे. अथवा गतिच्या दृष्टीनें ५०″ २ (विकला) इतकी उणीव पूर्ण प्रदक्षिणेंत दरवर्षी रहातें, त्यामुळें सुमारें ७१।७२ वर्षांमध्यें एक अंशाची कसर पूर्ण प्रदक्षिणेमध्यें उरते. हेच अयनांश. **ऋतुचक्राचे** परिभ्रमण सांपातिक मानाप्रमाणें आहे, आणि आपले चैत्रादि महिने नाक्षत्र असल्यानें आपलें नाक्षत्र वर्षमान **तत्त्वत** आणि वस्तुत (निश्चल) आहे. परतु नाक्षत्र वर्षाचें मान वेधानें निश्चित समजण्यास शेंकडों वर्षे लागतात म्हणून वेधास अगदीं सुलभ असें सांपत्तिक वर्षमानच वेदकाळीं प्रचारात होतें परतु त्याचा मेळ फार चातुर्यानें स्थिर नक्षत्र चक्राशीं घातला होता. सूर्याचें **स्थान** एकच परतु संपातापासून केलेलें मापन, आणि निश्चल आरंभ स्थानापासून केलेलें मापन ह्यात जी तफावत पडते

तिलाच अयनांश म्हणतात.

ग्रह गणित सांपातिक मापनानें करण्यास सुलभ जाते. तेव्हां गणितसौकर्यासाठीं आणि भूमध्य गणिताच्या स्पष्टतेसाठीं ग्रह सायन करावे लागतात म्हणून येथें **अयनांश** प्रकरणाचा उल्लेख केला आहे.

सूर्यसिद्धान्त दोन आहेत एक वराहमिहिराचार्यांनीं संपादन केलेला आणि दुसरा ह्या आपणापुढें आहे तो. ह्या दुसरा सूर्यसिद्धांत मयासुराला इकडील विद्वानांनीं शिकविला. वराहमिहिराचार्यांनीं संपादित जो सिद्धात तो बराच त्रुटित आणि अपपाठांनीं दूषित झालेला आहे तथापि तो मूलसिद्धात आणि ह्या प्रचलित सिद्धांत हे दोन्हींहि **प्राचीनच** आहेत कोणी मूलसूर्यसिद्धात ह्या वराहमिहिरानेंच बनविला किंवा रचला असें म्हणतात; परतु हें म्हणणें वस्तुस्थितिचा विपर्यास आहे. ह्याचें सांगोपांग विवेचन येथें अप्रस्तुत आहे म्हणून अधिक लिहित नाहीं वराह संपादित सिद्धांत निदान शककालारंभीचा तरी आहे, तथापि त्याच्यामध्यें कांहीं प्रक्षिप्त भागहि आहे. आणि तो स्पष्ट दाखविता येतो ह्या प्रचलित सिद्धातहि मूळ सिद्धाताला धरून दुसऱ्या कोणी विद्वानानें संपादन केला आहे.

ह्या प्रचलित सिद्धात ज्या काळीं प्रकाशित किंवा प्रसिद्ध झाला त्या वेळीं **अयनांश** शून्य होते किंवा जवळ जवळ शून्य होते. म्हणून मेषसंक्रमण आणि तुलासंक्रमण हेच विषुव दिन मानले आहेत अयनांशाच्या प्रश्नाचा मूळ ग्रथामध्यें **योग्य स्थळीं समावेश** नाहीं, अशी ज्यो दिक्षित यांची टीका आहे. ती समर्पकच आहे. शिवाय महत्त्वाचा आक्षेप असा कीं, अयनांश संस्कारानें रवि सायनच आला पाहिजे, आणि छायेवरूनहि **तितकाच** आला पाहिजे. परतु ह्या सिद्धांतांत संपात भगणामध्यें संख्या कमी मानल्याकारणानें अयन भगणावरून येणारे अयनांश आणि छायेवरून येणारे **बिनचूक अयनांश** ह्यांचा मेळ राहत नाहीं ह्याच ह्या श्लोकावर मोठा आक्षेप येतो. ह्याचे पुढें ज्यो. दिक्षितांचा आक्षेप खरा असला तरी गौण ठरतो.

स्फुटंदक्तुल्यतांगच्छेदयनेविषुवद्द्ये ॥
प्राक्चक्रंचलितंहीनेछायार्कात्करणागते ॥
अन्तरांशैरथावृत्यपश्चाच्छेषैस्तथाधिके ॥ ११ ॥

अयनांशाचा दृक्प्रत्यय अयनसंधिच्या वेळीं म्हणजे उदगयन अथवा दक्षिणायन होतें त्यावेळीं किंवा दोन्ही विषुव दिवशीं, सहज घेतां येतो. करणागत रवि छायार्कापेक्षां कमी असल्यास नक्षत्रचक्र पूर्वेकडे चळलें आहे असें समजावें, आणि करणागत रवि ज्यास्त असल्यास भचक्र पश्चिमेकडे सरकलें अशी उलट स्थिति समजावी.—११

[एवंच छायार्क आणि करणागत रवि ह्यांचें अन्तरांश तेच **अयनांश** हें उघड आहे.]

स्पष्टीकरणः—संपात हा पूर्वेकडून पश्चिमेकडे सरत आहे त्या कारणानें जोंपर्यंत संपात निरयन मेषारंभाच्या पूर्वेस आहे तोंपर्यंत निरयन रवितून **अयनांश** वजा केल्यानें सायन रवि येतो; आणि संपात निरयन मेषारंभस्थानाच्या पश्चिमेकडे सरकला म्हणजे निरयन रविमध्यें **अयनांश** मिळवावे लागतात. शके ४९६ पासून संपात मेषारंभाच्या पश्चिमेकडे हटल्यामुळें हल्लीं अयनांश निरयन रविमध्यें मिळवावे लागतात.

भास्कराचार्यांनीं अयनांशांचा खुलासा अतिशय सुबोध केला आहे ते म्हणतातः—

यस्मिन् दिने सम्यक् प्राच्यां रविरुदितो दृष्टः । तद् विषुवत् दिनम् । तस्मिन् दिने गणितेन स्फुटो रविः कार्यः । तस्य रवे र्मेषादेश्च यदन्तरं तेऽयनांशाः ज्ञेयाः ॥....दक्षिणे तु तस्यार्कस्य तुलादेश्चान्तर मयनांशाः ॥

एवंविषुवतीच्छायास्वदेशेयादिनार्धजा ॥
दक्षिणोत्तररेखायांसातत्रविषुवत्प्रभा ॥ १२ ॥

त्याचप्रमाणें विषुवदिवशींची मध्यान्हींचीं जी शंकु छाया दक्षिणोत्तर रेषेवर बरोबर पडते, ती त्या स्थलाची **पलभा** होय.

हें श्लोकार्थ श्लोक ८ चें पुढें वाचावें.

स्पष्टीकरणः—कोणत्याहि दिवशींची मध्यान्हीची शङ्कु **छाया** सूर्याचें नतांश दर्शविते. सूर्य विषुवामध्यें असतांना सूर्याचें जें नतांश (खमध्यापासून अन्तरांश) तेंच विषुववृत्ताचेंही अन्तरांश आणि विषुवाचे अन्तरांश तेंच त्या स्थलाचें अक्षांश असें होतें म्हणून **पलभा** म्हणजे अक्षांशदर्शक **छाया** असा अर्थ झाला.

शङ्कुच्छायाहतेत्रिज्योविषुवत्कर्णभाजिते ॥
लम्बाक्षज्येतयोश्चापेलम्बाक्षौदक्षिणौसदा ॥ १३ ॥

एकदां शङ्कूला त्रिज्येनें गुणावें, आणि एकदा विषुव **पलभेला** (त्रिज्येनें) गुणावें; आणि दोन्ही गुणाकारांना छाया कर्णानें भागावें म्हणजे अनुक्रमानें **लम्बज्या** आणि **अक्षज्या** निष्पन्न होतात.

स्पष्टीकरणः—शङ्कूच्या **काटकोन** त्रिकोणांतील अक्षांश कोना व्यतिरिक्त राहिलेला लघुकोन हा अक्षांशाचा पूरक कोन होतो. अक्षांश कोनाची कोटि (लगतची रेषा) भुजज्येच्या उलट दिशेकडे स्वस्वस्तिकाकडे वाढविली आणि छायाकर्णाचें सूत्रहि विषुवाकडे वाढविलें तर पलभेप्रमाणें नतांशज्या हि काढतां येते; आणि—शंकु त्रिकोणाच्या उलट बाजूस—मस्वस्तिक लम्ब, नतांशज्या, आणि त्रिज्या असा, तसाच दुसरा काटकोन

तयार होतो. ह्या दोन काटकोनाचें प्रमाण कसें ठरवावें तें ह्या श्लोकात सांगितलें आहे. शंकूशीं प्रमाणबद्ध अशी रेषा लम्बज्या आहे. तिचें त्रैराशिकः—

छाया कर्णाला : जसा शङ्कु : : त्याप्रमाणें = त्रिज्येला : लम्बज्या; आणि छायाकर्णास : जशी पलभा : : तशी त्रिज्येला : अक्षज्या.

∴ लम्बज्या = शंकू × त्रिज्या – छायाकर्ण

अक्षज्या = पलभा × त्रिज्या – छायाकर्ण

अक्षज्या = Sine Latitude } ध्रुवाचे उन्नतांश / विषुवाचे नतांश

लम्बज्या = Cosine Latitude = Sine Co-Latitude } विषुवाचे उन्नतांश / ध्रुवाचें नतांश.

अक्षज्या आणि लम्बज्या ह्यांचीं चापें (arcs) केलीं असता अनुक्रमानें अक्षांश आणि लम्बांश होतात. त्यांचें मूळ विषुव असल्यानें त्यांची दिशा दक्षिण समजतात.

मध्यच्छायाभुजस्तेनगुणितात्रिभमौर्विका ॥
स्वकर्णाप्ताधनुर्लिप्तानतास्तादक्षिणेभुजे ॥ १४ ॥

श्लोकार्थः—कोणत्याहि दिवशीं मध्यान्हीं सूर्याची (शङ्कु) छाया याम्योत्तरावर पडते ती आणि त्रिज्या ह्यांचा गुणाकार करून त्याला त्याचवेळच्या छायाकर्णानें भागून त्याचें चाप (arc) केलें असतां सूर्याचे तत्कालीन **नतांश** निघतात.

छाया दक्षिणेकडे असेल तर नतांश उत्तर असतात आणि छाया उत्तरेची असेल तर नतांश दक्षिण असतात.

स्पष्टीकरणः—ह्या श्लोकांतील नियम वर श्लोक १३ ह्यांतील पलभा–भावना-पेक्षां व्यापक आहे. कारण **अक्षांश** म्हणजे विषुव दिवशीचे **नतांशच** होत.

उत्तराश्चोत्तरे याम्यास्ताः सूर्यक्रांतिलिप्तिकाः ॥
दिग्भेदेमिश्रिताः साम्येविश्लिष्टाश्चाक्षलिप्तिकाः ॥ १५ ॥

अक्षांश आणि नतांश हे भिन्न दिशांचे असतील तर दोहोंची बेरीज केली असता सूर्याची क्रांति समजेल आणि एकाच दिशेचे असतील तेव्हां त्यांचें जें अंतर असेल तितकी रविची क्रांति समजावी—१५॥

स्पष्टीकरणः—*अक्षांश हे कायम आहेत. ते आपल्या इकडे ख़स्वस्तिकापासून* दक्षिणेकडे विषुव-वृत्तापर्यंत मोजतात. म्हणून नतांश जर दक्षिणेकडीलच असतील तर नतांश आणि अक्षांश ह्यांच्या अंतरा इतकी क्रांति असते; नतांश अक्षांशापेक्षां कमी असल्यास क्रांति उत्तरेची, ज्यास्त असल्यास क्रांति दक्षिणेची असते; नतांश शून्य असल्यें

म्हणजे क्रांति अक्षांशाइतकी, आणि नतांश उत्तरेचे पण अक्षांशापेक्षा पलीकडे असले तर अक्षांश + नतांश इतकी क्रांति असते.

ताभ्योऽक्षज्याचतद्वर्गं प्रोज्झ्यत्रिज्याकृतेः पदम् ॥
लम्बज्यार्कगुणाक्षज्याविषुवद्भाथलम्बया ॥ १६ ॥

अक्षांशांची जी दोर्ज्या ती अक्षज्या; [ज्या मध्यें एक कोन अक्षांशाइतका असतो अशा **काटकोन** त्रिकोणास अक्ष-क्षेत्र म्हणतात. असे अक्ष-क्षेत्र-त्रिकोण खगोल गणितांत पंधरासोळा तरी आढळतात]. अशाच काटकोनी अक्ष-क्षेत्रांत अक्षज्या ही भुजरेषा; लंबज्या ही कोटि, आणि त्रिज्या हा कर्ण असतो. म्हणून (श्लोक ८ प्रमाणें कर्ण^2 — अक्षज्या^{2} = लंबज्या^{2} [श्लोक १३ तील अनुपाताप्रमाणें] लंबज्येला : अक्षज्या : : तर द्वादशशंकु : पलभा ∴ अक्षज्या × द्वादशशंकु ÷ लंबज्या = पलभा.

स्वाक्षार्कनतभागानांदिक्साम्येऽन्तरमन्यथा ॥
दिग्भेदेऽपक्रमः शेषस्तस्यज्यात्रिज्ययाहता ॥ १७ ॥
परमापक्रमज्याप्ता चापंमेषादिगोरविः ॥
कर्कादौप्रोज्झ्यचक्रार्धात्तुलादौभार्धसंयुतात् ॥ १८ ॥

छायार्क-साधन

[ह्यांतील कांहीं भावार्थ श्लोक १५ प्रमाणें आहे]. जर आपल्या स्थानाचे अक्षांश आणि रविचे (अथवा इतर कोणत्याहि ग्रहाचे) नतांश जर एकाच दिशेचे असतील तर त्यांची वजाबाकी करावी; आणि भिन्न दिशांचे असतील तर बेरीज करावी म्हणजे स्पष्ट क्रान्ति येते.

उ० उ०

(नतांश ~ अक्षांश = क्रान्ति = नतांश + अक्षांश

इष्ट क्रान्तिला त्रिज्येनें गुणावें आणि रवीच्या परम क्रान्तिनें (२३° २७') भागावें. भागाकार येईल त्याचें चाप (arc) करावें म्हणजे मेषादि (संपातापासूनचा) मध्यान्हीचा-सायन सूर्य येतो. (सूर्य दुसऱ्या पदांत असेल तर) परिघांश सहा राशींतून वजा करावे, तिसऱ्या पदांत-असेल तर त्यांतून सहाराशी वजा कराव्या; आणि चौथ्या पदामध्यें असेल तर तितके राश्यंश बारा राशींतून वजा करावे म्हणजे भुज (चाप) होतो. १७-१८.

स्पष्टीकरण:—परमक्रान्ति, त्रिज्या, आणि विषुवांश हा एककाटकोन त्रिकोण, आणि सायनसूर्याचा भोग, इष्टक्रान्ति आणि विषुवांश हा दुसरा काट-त्रिकोण, ह्यांचा परस्पर संबंध आणून भोग साध्य करावयाचे आहेत. क्रांति दर्शक दक्षिणोत्तर वर्तुळ हें विषुवांशी आणि त्याच्याशीं समान्तर अशा अक्ष-वर्तुळांशीं निरन्तर काटकोनच करितें म्हणून विषुवांश आणि क्रांति हे काटकोनाचे बाहु आणि सायनभोग हा कर्ण मानून प्रमाण असें निश्चित केलें:—परमक्रांति ÷ त्रिज्या = इष्टक्रांति ÷ रविभोग

∴ त्रिज्या×इष्टक्रांति÷परमक्रांति = सायन रविभोग. सायन रवि निश्चित करतांना तो कोणत्या पदामध्यें आहे तेंहि पाहावें लागतें. विषुवापासून दक्षिणायनापर्यंत. (१) द०पासून शरद्विषुव (२) श-विषुवापासून उदगयनबिंदु (३) आणि उद० पासून वसंत संपातापर्यंत(४) अशीं चार पदें असतात; त्या अनुरोधानें प्रथम छायेवरून नतांश, त्यावरून इष्टक्रांति; आणि तिच्यावरून पद-गत भोग आणि त्या भोगावरून मग सायन भोग. अशी सांखळी आहे. सायन भोगावरून मग आवश्यकते प्रमाणें भुज, कोटि आणि कर्ण काढावयाचे असतात.

टीप:—कांहीं अक्ष क्षेत्रांचे त्रिकोण महत्वाचे आहेत ते भास्कराचार्यांनीं सांगितले आहेत त्यापैकीं विशेष महत्वाचे आहेत ते असे:— त्रिकोणामध्यें अक्षांश कोन भुजज्ये समोरच असतो, आणि कोणालगतची रेषा ही **कोटि** असते. म्हणून भुज-कोटि-कर्ण ह्या पैकीं दोन मानें जरी कळलीं तरी त्रिकोण ज्ञात होतें. (कोणताहि **समकोन** त्रिकोण दुसऱ्या तशाच समकोन त्रिकोणाशीं प्रमाणबद्ध असतो हा नियम मात्र दृष्टीपुढें ठेवावा. त्रिप्रश्नाधिकार ह्याच नियमावर आधारलेला आहे.)

भुज	कोटि	कर्ण
पलभा (१)	शंकु	पलकर्ण.
अक्षज्या (२)	लंबज्या	त्रिज्या.
ध्रुवोन्नतज्या (३)	,,	त्रिज्या.
क्रांतिज्या (४)	द्युज्या	त्रिज्या
अग्रा (५)	समशंकु.	तद्धृति (मध्यान्हकर्ण)
क्षितिज्या (६)	क्रांतिज्या	अग्रा
(*नतांश=त्रिकोण येणें प्रमाणें*)		
स्वकर्णाग्रा [७]	लोहकील [शंकु]	इष्टकालीन छायाकर्ण
नतांशछाया [दिग्ज्या] (८)	शङ्कु	छायाकर्ण
भुज [९]	महाशङ्कु	हृति [त्रिज्या]
दृग्ज्या (१०)	महाशंकु	त्रिज्या.

[असें अनेक काट-त्रिकोण होतात]

क्रांतिला Declination असें इंग्रजी नांव आहे.

मृगादौग्रोज्झ्यभगणान्मध्यान्हेऽर्कः स्फुटोभवेत् ॥
तन्मान्दमसकृद्वामंफलंमध्यो दिवाकरः ॥ १९ ॥

स्पष्ट सायन रविवरून **मध्यम** सायन सूर्य आणावयाचा प्रकार—

स्पष्टरविला मध्यमरवि समजून मन्दफल आणावें आणि त्याचा उलट संस्कार पुनः पुनः स्पष्टरविस करावा म्हणजे मध्यम रवि येईल—१९

स्पष्टीकरण:—स्पष्टरवि कळला म्हणजे त्यावरून मध्यमरवि आणलाच पाहिजे कारण त्यावाचून पुढील वर्षांचें किंवा मागील वर्षांचें गणितच करतां येणार नाही. परंतु

असें करतांना स्पष्टरविलाच मध्यमरवि मानल्या शिवाय गत्यन्तर नाहीं, म्हणून स्पष्ट-रविला मंदफल संस्कार उलट देऊन मध्यमरवि आणावा; परंतु हा खरा मध्यमरवि नसेतो खरा मध्यमरवि तो, कीं ज्याला मन्दफल संस्कार योग्य प्रकारानें केला असतां स्पष्टरवि येईल तो दृक्प्रत्ययास मिळाला पाहिजे. म्हणून असा आसन्न मध्यमरवि (म्हणजे खऱ्या मध्यम रवि जवळचा जो) येईल त्या वरूनच पुनः स्पष्ट रवि आणावा; आणि आपल्या वेधाशीं तो जुळला तरच मध्यम-रवि बिनचूक आला असें समजावें. नाही तर पुनः मन्द-फल आणून त्याचा उलट संस्कार देऊन पुनः मध्यम रवि साधावा आणि त्याचा पुनः स्पष्टरवि करून पडताळा पहावा. असें पुनः पुनः करावें. ह्या कृतिलाच असकृत् कर्म म्हणतात. ज्योतिर्गणितात असें कित्येक प्रसंगीं करावें लागतें.

हीच रीति, चन्द्र आणि इतर ग्रह ह्यानाहि लावून मध्यम ग्रह साधावे.

मध्यान्हीची नतांश छाया आणणेचा प्रकारः—

[ह्यांतील रीति १७ व्या श्लोकाच्या उलट आहे]

स्वाक्षार्कापक्रमयुतिर्दिक्साम्येऽन्तरमन्यथा ॥
शेषं नतांशाः सूर्यस्य तद्बाहुज्याथ कोटिजा ॥ २० ॥
शङ्कुमानाङ्गुलाभ्यस्ते भुजत्रिज्ये यथाक्रमम् ॥
कोटिज्यया विभज्याप्ते छायाकर्णावहर्दले ॥ २१ ॥

अक्षांश आणि क्रान्ति हे एकाच दिशेचे (म्हणजे दोन्ही दक्षिणेचे किंवा दोन्ही उत्त-रेचे) असले तर त्याचे परस्परांचें अंतर काढावें, आणि भिन्न दिशांचे असल्यास त्यांची बेरीज करावी म्हणजे नतांश येतात. इतर चापाप्रमाणें त्यांचीहि दोर्ज्या(sine) आणि कोटिज्या (Co sine) काढून ठेवावी.—२०

नतांशांना Zenith Distance (झेनीथ डिस्टन्स) म्हणतात.

[नतांशांच्या भुजज्येला दिग्ज्या म्हणतात.] शंकूच्या अंगुलानीं एकदां नतांश भुजज्येला, आणि एकदां त्रिज्येला गुणावें, आणि नतांश-कोटिज्येनें दोन्ही गुणाकारांना भागावें म्हणजे अनु-क्रमानें मध्यान्हीची नतांश छाया, आणि मध्यान्हीचाच छायाकर्ण हे येतील.—२१

स्पष्टीकरणः—खस्वस्तिकापासून याम्योत्तरावरील किंवा इतर कोणत्याहि दृङ्मण्डलावर मोजलेलें अंशात्मक अंतर तें नतांश. नतांश-उन्नतांश—मापन हें (दिक्साधनानंतरचें) अत्यंत महत्त्वाचें वेधसाधन आहे. प्रत्यक्ष वेधानें साध्य होणाऱ्या गोष्टीः—(१) नतांश-उन्नतांश; (२) याम्योत्तरलङ्घन आणि (३) ग्रहणस्पर्शमोक्ष. हे वेध अमुक दिवशीं, अमुक वेळेस आणि अमुक ठिकाणीं घेतले हें मात्र स्पष्ट सांगितलें पाहिजे. हेच प्राथमिक वेध.

ह्या प्राथमिक वेधांपासूनच क्रान्ति, आणि विषुवांश सिद्ध करितात. आणि त्यापासून स्पष्ट सायनभोग-शर, दृक्कर्म-दृग्भोग, आणि मध्यम ग्रहस्थिति इत्यादि अनेक उपकरणें निष्पन्न होतात. कित्येक वेळा क्रांतियंत्रानेंहि स्पष्ट क्रांति प्रत्यक्ष वेधानेंच ठरवितां येते. म्हणून—

प्राथमिक वेध

नतांशो–न्नतांश, याम्योत्तरलङ्घन, ग्रहण–स्पर्श मोक्ष; आणि वेधसिद्ध क्रान्ति–ह्याचा स्थलानुरोधानें, कालनिश्चय– हे **प्राथमिक वेध** होत

क्रांतिज्याविषुवत्कर्णगुणाप्ताशङ्कुजीवया ॥
अर्काग्रास्वेष्टकर्णघ्नीमध्यकर्णोद्धृतास्त्रका ॥ २२ ॥

ह्या श्लोकात दृग्ज्या महाशंकु पलभा लोहशंकु आणि
महाशंकु त्रिज्या लोहशंकु छायाकर्ण असें प्रमाण आहे
नतांश कोटिज्येला महाशङ्कु म्हणतात

क्रान्तिज्येला पलकर्णानें गुणून शङ्कुच्या अङ्गुलानीं भागावें म्हणजे सूर्याची **अग्रा** समजते, आणि सूर्याच्या **अग्रेला** (इष्ट वेळच्या) छायाकर्णानें गुणून त्रिज्येनें भागिलें असता इष्टकालाला अनुरूप अशी अग्रा उपलब्ध होते —२२

स्पष्टीकरणः—ह्यात क्षेत्र–त्रिकोणाच्या दोन जोड्या आहेत पहिली जोडी (१), (६'); आणि (५), (७) ही दुसरी त्यावरून प्रमाणें मिळतात तीं —

$$\frac{\text{पलकर्ण}}{\text{शङ्कु}} = \frac{\text{अग्रा}}{\text{क्रांतिज्या}} \quad —(१) \quad \therefore \frac{\text{पलकर्ण} \times \text{क्रान्ति}}{\text{शङ्कु}} = \text{अग्रा}$$

$$\frac{\text{अग्रा}}{\text{मध्यान्हकर्ण}} = \frac{\text{इष्टअग्रा}}{\text{इष्टकालिकर्ण}} \quad \therefore \frac{\text{अग्रा} \times \text{छायाकर्ण}}{\text{मध्यान्हकर्ण}} = \text{इष्टाग्रा}$$

अशीं प्रमाण–पदें सिद्ध होतात

प्रथम पलकर्णावरून म्हणजे पलभेच्या कर्णसूत्रावरून सूर्याची **अग्रा** हा कर्ण साधला, आणि त्या **अग्रे** वरून मग कोणत्याहि कर्णाची म्हणजे कोणत्याहि वेळेची—**अग्रा** निष्पन्न केलो हिलाच **इष्टकालिक अग्रा** म्हटलें आहे **अग्रा** म्हणजे Amplitude, अहोरात्र कर्ण हाच मध्यकर्ण घेऊन नतर त्यावरून इष्टकालीन **अग्रा** सिद्ध केली

विषुवद्भायुतार्काग्रायाम्येस्यादुत्तरोभुजः ॥
विषुवत्याविशोध्योदग्गोलेस्याद्बाहुरुत्तरः ॥ २३ ॥
विपर्ययाद्भुजोयाम्योभवेत्प्राच्यपरान्तरे ॥
माध्याह्निकोभुजोनित्यंछायामाध्याह्निकीस्मृता ॥ २४ ॥

दक्षिणगोलामध्यें (सूर्य असला तर) जी स्व–अग्रा (म्हणजे अभीष्ट कालीन) अग्रा येईल ती पलभेमध्यें मिळविली असता भुज साध्य होतो (हा भुज उत्तरेचा असतो) परंतु सूर्य उत्तरगोलांत असला तर पलभेतून अग्रा वजा केली म्हणजे भुज येतो (पण तो दक्षिणदिशेचा असतो) [जर पलभेपेक्षां अग्रा अधिक असली तर अग्रेतून पलभा वजा करावी.]

कोणत्याहि दिशेचा भुज असला तरी तो छायाग्र आणि पूर्वापररेखा ह्यांच्या मध्येंच असावयाचा. (भुज निष्पन्नच होत नाहीं तेव्हां शंकुछायेचें अग्र पूर्वापररेखेवरच येतें) कारण मध्यान्ह कालचा भुज हा केव्हांहि मध्यान्ह छायेपासून भिन्न नसतो.

स्पष्टीकरणः—ख-विषुवाच्या उत्तरेकडील गोलार्धास उत्तरगोल, आणि दक्षिणेकडील गोलार्धास दक्षिणगोल म्हणतात. आपला प्रदेश विषुवाच्या उत्तरेकडे आहे. त्यामुळें विषुववृत्ताच्या उत्तरेकडील समान्तर वर्तुळाचा भाग अर्ध्यापेक्षां ज्यास्त प्रमाणांत आपल्या दृष्टीच्या टप्प्यांत येतो. जसजसे स्थळाचें उत्तर अक्षांश ज्यास्त तसतसा त्या त्या ठिकाणीं समान्तर वृत्तांचा अधिकाधिक भाग दृष्टिपथांत येतो. उत्तर अक्षांशांतील प्रदेशांत राहणाऱ्यांना दक्षिण गोलाचें दृश्य उलट असतें. म्हणजे दक्षिणेकडील समान्तर वृत्तांचा भाग **अर्ध्याहून** कमी कमी दिसावयाचा. अशी वस्तुस्थिति असल्यानें क्रांति उत्तर असल्यास किंवा अक्षांश अधिक अधिक उत्तरेचे असतील तसतसा ग्रहांचा नित्योदय अधिक लवकर होतो. उत्तर अक्षांशांत राहणारांना दक्षिण गोलांतील ग्रह उशीरा उगवतात. कारण समान्तर वर्तुळांचा दृश्य भागच आपल्यास कमी प्रमाणांत दृष्टीस पडतो.

आपल्या स्थळाच्या ख-स्वस्तिकांतूनच पूर्वापर सूत्ररेषा विषुवाच्या पूर्व-पश्चिम बिन्दूंत मिळते; म्हणूनच ह्या दिङ्मंडळाला (म्हणजे Vertical वृत्ताला) पूर्वापर सूत्र (Prime Vertical) म्हणतात. पूर्वापरवृत्ताच्या दक्षिणेकडे व उत्तरेकडे जीं अनेक वृत्तें विषुवाशीं **समान्तर** असतात, त्यांना अहोरात्रवृत्तें, अक्षांशवृत्तें, किंवा उदयास्तवृत्तें म्हणतात. ग्रहाची क्रान्ति आपल्या स्थळाच्या अक्षांशाइतकी असेल तेव्हांच तो ग्रह आपल्या स्थळाच्या पूर्वापरसूत्रांतून फिरेल आणि इतर वेळीं तो कोणत्या तरी अहोरात्र वृत्तावर असेल; हा देखावा आपल्या मनःचक्षू पुढें चित्रित नसेल तर विषय सोपा असूनही समजणार नाहीं.

आकाशांतील ग्रहापासून थेट भूपृष्ठावर ओळंब्याचें सूत्र सोडलें आहे अशी कल्पना केली तर त्या सूत्राला महाशङ्कु असें नांव आहे. तो अनियमित आहे. त्याचें भूपृष्ठांतील (मूल अथवा) स्थान आणि लोहकीलाच्या छायाकर्णानें निर्दिष्ट केलेलें उदयास्त सूत्र ह्यांच्यामधील अन्तराला **शङ्कुतल** म्हणतात. प्रत्यक्ष प्रयोगाशिवाय हें एकदम ध्यानांत येणार नाहीं. पण प्रयत्नानें येईल.

पूर्वापर वृत्त आणि उदयास्त वृत्त ह्यांच्यांतील क्षितिजरेखेवरील अन्तराला **अग्रा** म्हणतात. पलभेच्या योगानें शङ्कुमूल समजतें व त्यावरून शङ्कुतल लक्षांत येतें.

पलभा आणि **शङ्कुतल** ह्या संज्ञा भिन्न आहेत. परंतु लोहकीलाचा म्हणजे द्वादशाङ्गुल शंकूचा जो संबंध पलभेशी—तोच संबंध महाशङ्कुचा भुजाशीं व शङ्कुतलाशीं आहे येवढें ध्यानांत ठेवलें म्हणजे काम झालें. भुज म्हणजे महाशङ्कुचा भुज.

ह्या सूत्रांत सिद्धांतकारांनीं महाशङ्कु अथवा महालम्ब, आणि भुज, ह्या एका काटकोनाच्या दोन बाजू, आणि पलभा व द्वादश-कील (म्हणजे द्वादशाङ्गुल कील) ह्या दुसऱ्या दोन बाजू ह्यांचा संबंध दाखविला आहे.

आपल्या अक्षांशापेक्षां सूर्याची क्रान्ति कमी असेल तर महाशंकूचा आलम्ब पूर्वापर सूत्राच्या दक्षिणेकडे असतो आणि क्रान्ति उत्तरेचीच असेल तर अग्रादेखील उत्तरेचीच असते. अशा स्थितिमध्यें शङ्कुतलापेक्षां अग्रा कमी असते. दिशाभिन्नत्वामुळें शङ्कुतलांतून अग्रा वजा केली पाहिजे.

दक्षिण गोलामध्यें आलम्ब आणि अग्रा हे दोन्हीं एकाच दिशेचे असल्यानें आलम्ब-बिंदूपासून अहोरात्र बिन्दूपर्यंत भुज सलग असतो. सलगरेषेंत अग्रा आणि शंकुतल दोन्हीं समाविष्ट असतात. उत्तर गोलांत भुज=अग्रा–शंकुतल किंवा शंकुतल–अग्रा=भुज. असें समीकरण होतें. आतां शंकुतलाचा आणि पलभेचा संबंध असा:—

$$\text{द्वादश कील : पलभा :: महाशंकु} = \frac{\text{पलभा} \times \text{महाशंकु}}{१२} = \text{शंकुतल}$$

$$\frac{\text{त्रिज्या}}{\text{महाशंकु}} = \frac{\text{कर्ण}}{१२} \quad \therefore \text{ महाशंकु} = \frac{१२ \times \text{त्रि}}{\text{कर्ण}}$$

$$\text{परंतु} \frac{\text{पलभा} \times \text{महाशंकु}}{१२} = \text{शंकुतल} = \frac{\text{पलभा} \times १२ \times \text{त्रि}}{१२ \times \text{कर्ण} (=\text{त्रिज्या})}$$

∴ शंकुतलाचें जागीं पलभा म्हणण्यास हरकत नाहीं : म्हणून
दक्षिण गोलामध्यें, भुज = अग्रा + पलभा.
उत्तर गोलामध्यें भुज=अग्रा–पलभा; किंवा पलभा–अग्रा.

लम्बाक्षजीवेविषुवच्छायाद्वादशसङ्गुणे ॥
क्रान्तिज्याप्तेतुतौकर्णौसमण्डलगेरवौ ॥ २५ ॥

लम्बज्येला पलभेनें, आणि अक्षांश–दोर्ज्येला द्वादश शंकूनें गुणून क्रान्ति-ज्येनें भागावें, भागाकार येईल तो सममण्डल-कर्ण होतो. [रवि सममण्डलांत असतां पूर्वापर सूत्र हें कर्णरूप असतें.]

स्पष्टीकरणः—

$$\text{पलकर्ण : पलभा :: क्रान्तिज्या : समशंकु} = \frac{\text{पलकर्ण} \times \text{क्रान्तिज्या}}{\text{पलभा}} \qquad (१)$$

$$\frac{\text{समशंकु}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{१२ \text{ शंकु}}{\text{सममंडलकर्ण}} \quad \therefore \text{ सममण्डलकर्ण} = \frac{१२ \times \text{त्रिज्या}}{\text{समशंकु}} \qquad (२)$$

$$\therefore \text{ सममण्डलकर्ण} = \text{पलभा} \times १२ \times \text{त्रिज्या} \div \text{पलकर्ण} \times \text{क्रान्तिज्या}$$

$$= \text{पलभा} \times \left(\frac{१२ \times \text{त्रिज्या}}{\text{पलकर्ण}}\right) \div \text{क्रान्तिज्या} = १२ \left(\frac{\text{पलभा} \times \text{त्रि}}{\text{पलकर्ण}}\right) \div \text{क्रातिज्या}$$

कोणत्याहि दिशेचा भुज असला तरी तो छायाग्र आणि पूर्वापररेषा ह्यांच्या मध्येंच असावयाचा. (भुज निष्पन्नच होत नाही तेव्हां शंकुछायेचें अग्र पूर्वापररेषेवरच येतें) कारण मध्यान्ह कालचा भुज हा केव्हांहि मध्यान्ह छायेपासून भिन्न नसतो.

स्पष्टीकरणः—प–विषुवाच्या उत्तरेकडील गोलार्धास उत्तरगोल, आणि दक्षिणेकडील गोलार्धास दक्षिणगोल म्हणतात. आपला प्रदेश विषुवाच्या उत्तरेकडे आहे. त्यामुळें विषुववृत्ताच्या उत्तरेकडील समान्तर वर्तुळाचा भाग अर्ध्यापेक्षां ज्यास्त प्रमाणांत आपल्या दृष्टीच्या टप्प्यांत येतो. जसजसे स्थळाचे उत्तर अक्षांश ज्यास्त तसतसा त्या त्या ठिकाणी समान्तर वृत्तांचा अधिकाधिक भाग दृष्टिपथांत येतो. उत्तर अक्षांशांतील प्रदेशांत राहणाऱ्यांना दक्षिण गोलाचें दृश्य उलट असतें. म्हणजे दक्षिणेकडील समान्तर वृत्तांचा भाग अर्ध्याहून कमी कमी दिसावयाचा. अशी वस्तुस्थिति असल्यानें क्रांति उत्तर असल्यास किंवा अक्षांश अधिक अधिक उत्तरेचे असतील तसतसा ग्रहांचा नित्योदय अधिक लवकर होतो. उत्तर अक्षांशांत राहणारांना दक्षिण गोलांतील ग्रह उशीरा उगवतात. कारण समान्तर वर्तुळांचा दृश्य भागच आपल्यास कमी प्रमाणांत दृष्टीस पडतो.

आपल्या स्थळाच्या ख-स्वस्तिकांतूनच पूर्वापर सूत्ररेषा विषुवाच्या पूर्व–पश्चिम विन्दूंत मिळते; म्हणूनच ह्या दिङ्मंडळाला (म्हणजे Vertical वृत्ताला) पूर्वापर सूत्र (Prime Vertical) म्हणतात. पूर्वापरवृत्ताच्या दक्षिणेकडे व उत्तरेकडे जीं अनेक वृत्तें विषुवाशीं समान्तर असतात, त्यांना अहोरात्रवृत्तें, अक्षांशवृत्तें, किंवा उदयास्तवृत्तें म्हणतात. ग्रहाची क्रान्ति आपल्या स्थळाच्या अक्षांशाइतकी असेल तेव्हांच तो ग्रह आपल्या स्थळाच्या पूर्वापरसूत्रांवून फिरेल आणि इतर वेळीं तो कोणत्या तरी अहोरात्र वृत्तावर असेल; हा देखावा आपल्या मनःचक्षु पुढें चित्रित नसेल तर विषय सोपा असूनही समजणार नाहीं.

आकाशांतील ग्रहापासून थेट भूपृष्ठावर ओळंब्याचें सूत्र सोडलें आहे अशी कल्पना केली तर त्या सूत्राला महाशङ्कु असें नांव आहे. तो अनियमित आहे. त्याचें भूपृष्ठांतील (मूल अथवा) स्थान आणि लोहकीलाच्या छायाकर्णानें निर्दिष्ट केलेलें उदयास्त सूत्र ह्यांच्यामधील अन्तराला शङ्कुतल म्हणतात. प्रत्यक्ष प्रयोगाशिवाय हें एकदम ध्यानांत येणार नाहीं. पण प्रयत्नानें येईल.

पूर्वापर वृत्त आणि उदयास्त वृत्त ह्यांच्यांतील क्षितिजरेषेवरील अन्तराला अग्रा म्हणतात. पलभेच्या योगानें शङ्कुमूल समजतें व त्यावरून शङ्कुतल लक्षांत येतें.

पलभा आणि शङ्कुतल ह्या संज्ञा भिन्न आहेत. परंतु लोहकीलाचा म्हणजे द्वादशाङ्गुल शंकूचा जो संबंध पलभेशी—तोच संबंध महाशङ्कुचा भुजाशीं व शङ्कुतलाशीं आहे येवढें ध्यानांत ठेवलें म्हणजे काम झालें. भुज म्हणजे महाशङ्कुचा भुज.

ह्या सूत्रांत सिद्धांतकारांनीं महाशङ्कु अथवा महालम्ब, आणि भुज, ह्या एका काटकोनाच्या दोन बाजू, आणि पलभा व द्वादश-कील (म्हणजे द्वादशाङ्गुल कील) ह्या दुसऱ्या दोन बाजू ह्यांचा संबंध दाखविला आहे.

आपल्या अक्षांशापेक्षां सूर्याची क्रान्ति कमी असेल तर महाशंकूचा आलम्ब पूर्वापर सूत्राच्या दक्षिणेकडे असतो आणि क्रान्ति उत्तरेचीच असेल तर अग्रादेखील उत्तरेचीच असते. अशा स्थितिमध्यें शङ्कुतलापेक्षां अग्रा कमी असते. दिशाभिन्नत्वामुळें शङ्कुतलांतून अग्रा वजा केली पाहिजे.

दक्षिण गोलामध्यें आलम्ब आणि अग्रा हे दोन्हीं एकाच दिशेचे असल्यानें आलम्ब-बिंदूपासून अहोरात्र बिन्दूपर्यंत भुज सलग असतो. सलगरेषेंत अग्रा आणि शंकुतल दोन्हीं समाविष्ट असतात. उत्तर गोलांत भुज=अग्रा–शंकुतल किंवा शंकुतल–अग्रा=भुज. असें समीकरण होतें. आतां शंकुतलाचा आणि पलभेचा संबंध असाः—

$$\text{द्वादश कील : पलभा :: महाशंकु} = \frac{\text{पलभा} \times \text{महाशंकु}}{१२} = \text{शंकुतल}$$

$$\frac{\text{त्रिज्या}}{\text{महाशंकु}} = \frac{\text{कर्ण}}{१२} \quad \therefore \text{ महाशंकु} = \frac{१२ \times \text{त्रि}}{\text{कर्ण}}$$

$$\text{परंतु} \frac{\text{पलभा} \times \text{महाशंकु}}{१२} = \text{शंकुतल} = \frac{\text{पलभा} \times १२ \times \text{त्रि}}{१२ \times \text{कर्ण} (=\text{त्रिज्या})}$$

∴ शंकुतलाचें जागीं पलभा म्हणण्यास हरकत नाहीं : म्हणून

दक्षिण गोलामध्यें, भुज = अग्रा + पलभा.

उत्तर गोलामध्यें भुज=अग्रा–पलभा; किंवा पलभा–अग्रा.

लम्बाक्षजीवेविपुवच्छायाद्वादशसङ्गुणे ॥
क्रान्तिज्याप्तेतुतौकर्णौसमण्डलगेरवौ ॥ २५ ॥

लम्बज्येला पलभेनें, आणि अक्षाश–दोर्ज्येला द्वादश शंकूनें गुणून क्रान्ति-ज्येनें भागावें, भागाकार येईल तो सममण्डल-कर्ण होतो. [रवि सममण्डलांत असतां पूर्वापर सूत्र हें कर्णरूप असतें.]

स्पष्टीकरणः—

$$\text{पलकर्ण : पलभा :: क्रान्तिज्या : समशंकु} = \frac{\text{पलकर्ण} \times \text{क्रान्तिज्या}}{\text{पलभा}} \qquad (१)$$

$$\frac{\text{समशंकु}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{१२ \text{ शंकु}}{\text{सममंडलकर्ण}} \quad \therefore \text{ सममण्डलकर्ण} = \frac{१२ \times \text{त्रिज्या}}{\text{समशंकु}} \qquad (२)$$

$$\therefore \text{ सममण्डलकर्ण} = \text{पलभा} \times १२ \times \text{त्रिज्या} \div \text{पलकर्ण} \times \text{क्रान्तिज्या}$$

$$= \text{पलभा} \times \left(\frac{१२ \times \text{त्रिज्या}}{\text{पलकर्ण}}\right) \div \text{क्रान्तिज्या} = १२ \left(\frac{\text{पलभा} \times \text{त्रि}}{\text{पलकर्ण}}\right) \div \text{क्रातिज्या}$$

$$\frac{१२ \times \text{त्रि}}{\text{पलकर्ण}} = \text{लबज्या}, \quad \frac{\text{प्रभा} \times \text{त्रि}}{\text{कर्ण}} = \text{अक्षज्या}$$

$$\therefore \frac{\text{पलभा} \times \text{लम्बज्या}}{\text{क्रान्तिज्या}}; \quad \frac{\text{अक्षज्या} \times १२}{\text{क्रान्तिज्या}} = \text{सममण्डल कर्ण}$$

सौम्याक्षोनायदाक्रान्तिः स्यात्तदाद्युदलश्रवः ॥
विषुवच्छाययाभ्यस्तः कर्णोमध्याग्रयोद्धृतः ॥ २६ ॥

जेव्हा क्रान्ति उत्तरेची परतु अक्षांशापेक्षा कमी असेल तेव्हा मध्यान्ह छायाकर्णाला पल-भेनें गुणावें आणि मध्याग्रेनें भागावें म्हणजे सममण्डलकर्ण येतो.

स्पष्टीकरणः—

येथें $\frac{\text{पलभा}}{१२} = \frac{\text{अग्रा}}{\text{समशंकु}}$. समशंकु $= \frac{\text{अग्रा} \times \text{द्वादश}}{\text{पलभा}}$ (१)

$\frac{\text{समशंकु}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{\text{द्वादश}}{\text{छायाकर्ण}}$ ∴ छायाकर्ण $= \frac{\text{द्वादश} \times \text{त्रिज्या}}{\text{समशंकु}}$ (२)

$$\text{छायाकर्ण} = \frac{\text{द्वादश} \times \text{त्रिज्या} \times \text{पलभा}}{\text{द्वादश} \times \text{अग्रा}} = \frac{\text{त्रिज्या} \times \text{पलभा}}{\text{अग्रा}}$$

ह्यांत अंश आणि छेद ह्या दोहोंना छायाकर्णानें गुणून त्रिज्येनें भागावें म्हणजे

$$\text{सममण्डलकर्ण} = \frac{\text{त्रिज्या} \times \text{पलभा} \times \text{छायाकर्ण} - \text{त्रिज्या}}{(\text{अग्रा} \times \text{छायाकर्ण} - \text{त्रिज्या}) = \text{मध्याग्रा}}$$

$= \frac{\text{पलभा} \times \text{छायाकर्ण}}{\text{मध्याग्रा (श्लोक २२ प्रमाणें)}}$ ही सरणि जरा लांबलचक आहे.

म्हणून उपपत्तिचा दुसरा प्रकार —

$\frac{\text{पलभा}}{\text{पलकर्ण}} = \frac{\text{अग्रा}}{\text{तद्हृति}}$. हृति $= \frac{\text{पलकर्ण} \times \text{अग्रा}}{\text{प्रभा}}$

तद्हृति मध्यकर्ण : पलकर्ण सममण्डलकर्ण

$\therefore \frac{\text{मध्यकर्ण} \times \text{पलकर्ण}}{\text{हृति}}$ $\therefore \frac{\text{मध्यकर्ण} \times \text{पलकर्ण} \times \text{प्रभा}}{\text{पलकर्ण} \times \text{अग्रा}}$

$$\therefore \frac{\text{मध्यकर्ण} \times \text{पलभा}}{\text{अग्रा}} = \text{सममण्डलकर्ण}$$

स्वक्रांति ज्यात्रिजीघ्नीलम्बज्याप्ताग्रमौर्विका ।
स्वेष्टकर्ण हताभक्तात्रिज्ययाग्राङ्गुलादिका ॥ २७ ॥

इष्ट दिवशींच्या रविक्रान्तिला (क्रान्तिज्येला) त्रिज्येनें गुणावें आणि लम्ब ज्येनें (अक्षांश कोटिज्येनें) भागावें म्हणजे अग्रेची भुजज्या येते;

तसेंच, अग्रेच्या भुजज्येला मध्यान्हकर्णानें गुणावें आणि त्रिज्येनें भागावें म्हणजे त्या कर्णाला अनुरूप अशी अग्रा येते. हिलाच स्वकर्णाग्रा म्हणतात.

स्पष्टीकरणः—लम्बज्येला : जशी त्रिज्या, तशी : : क्रान्तिज्येला : अग्रा

$$\therefore \frac{\text{त्रिज्या} \times \text{क्रान्तिज्या}}{\text{लम्बज्या}} = \text{अग्रा} \quad \dots \quad \dots \quad (१)$$

त्रिज्येला : जशी अग्रा : : तशी (इष्टकालीन) कर्णाला : कर्णाग्रा

$$\therefore \text{स्वकर्णाग्रा} = \frac{\text{अग्रा} \times \text{इष्टकर्ण}}{\text{त्रिज्या}} \quad \dots \quad \dots \quad (२)$$

आतां कोणशङ्कु आणि दृग्ज्या ह्यांचें साधन सांगतात:—

त्रिज्यावर्गार्धतोऽग्रज्यावर्गोनाद्द्वादशाहतात् ॥ २८ ॥
पुनर्द्वादशनिघ्नाच लभ्यतेयत्फलंबुधैः ॥
शङ्कुवर्गार्धसंयुक्तविपुवद्वर्गभाजितात् ॥ २९ ॥
तदेवकरणीनाम तापृथक्स्थापयेद्बुधः ॥
अर्कघ्नीविपुवच्छायाग्रज्ययागुणिता तथा ॥ ३० ॥
भक्ता फलाख्यंतद्वर्गसंयुक्तकरणीपदम् ॥
फलेनहीनसंयुक्तंदक्षिणोत्तरगोलयोः ॥ ३१ ॥
याम्ययोर्विदिशोः शङ्कुरेवंयाम्योत्तरेरवौ ॥
परिभ्रामतिशङ्कोस्तुशङ्कुरुत्तरयोस्तु सः ॥ ३२ ॥

—त्रिज्येचा वर्ग करून त्याची निमपट करावी; त्यातून अग्रावर्ग वजा करावा. बाकीला १४४ नीं गुणून त्या गुणाकाराला पलभा^{2} + ७२ ह्या बेरजेचा भाग द्यावा. $\left(\frac{\text{बाकी} \times १४४}{७२ + \text{पलभावर्ग}}\right)$

ह्या प्रकाराला ज्योतिषज्ञ " करणी " असें म्हणतात. ही " करणी " निराळी मांडून ठेवावी. मग पलभेला बारानीं (१२) आणि पूर्वोक्त अग्रा अशा दोन्हीं पदानीं गुणावें; आणि त्या संयुक्त गुणाकाराला पूर्वी निर्दिष्ट केलेल्या "करणी" चा म्हणजे ७२+ पलभावर्ग ह्या (बेरजे)चा भाग द्यावा जो भागाकार येईल त्याला " फल " अशी संज्ञा द्यावी. नंतर 'फल' वर्ग+ करणी' वर्ग ह्या

बेरजेचें वर्गमूळ काढावें. (दक्षिण गोलांत) त्या वर्गमूळांतून " फल " वजा करावें; आणि (उत्तर गोलांत) त्या वर्गमूळामध्यें " फल " मिळवावें. जें उत्तर येईल त्याला " कोणशङ्कु " म्हणतात. आग्नेय, नैर्ऋत्य, वायव्य, आणि ईशान्य अशा चारही दिशांस चार "कोणशङ्कु असतात. त्रिज्यावर्गांतून कोणशङ्कुवर्ग वजा केल्यास बाकी राहील तिच्या वर्गमूळाला "दृग्ज्या" म्हणतात.

स्पष्टीकरणः—हे श्लोक फारच क्लिष्ट आहेत त्यांतील सारांशाची माण्डणी अशी:—त्रिज्यावर्ग–अग्रावर्ग=शेष (बाकी); बाकी×१४४ भागिले पलभावर्ग +७२= " करणी " ;

१२ पलभा × अग्रा भागिले (पलभावर्ग + ७२) = "फल"

$$\text{फल}^2 + \text{करणी}^2 = \text{संयोग}$$

$$\sqrt{\text{संयोग}} \pm \text{फल} = \text{कोणशङ्कु}$$

$$\text{त्रिज्या}^2 - \text{कोणशङ्कु}^2 = \text{दृग्ज्या}^2$$

उपपत्ति

जेव्हां सूर्याचे उन्नतांश आणि नतांश समसमान असतात तेव्हां त्या काटकोन त्रिकोणाचा भुज आणि कोटि हेहि समसमान असतात. अशा त्रिकोणाच्या कर्णरेषेला दृग्ज्या म्हणतात. दृग्ज्या ही दोर्ज्या समजून तिला जी कोटि-रेषा असते तो " कोणशङ्कु " ह्याची निष्पत्ति असकृत्कर्मानें हि होते. परंतु तें गणित त्रासदायक आहे. सिद्धान्तकारानीं येथें निराळ्या रीतीनें कोणशंकू आणला आहे. प्राचीन काळीं ग्रीक लोकांना Sines देखील माहीत नव्हत्या. त्याकाळीं म्हणजे इसवी सनापूर्वी ३०० वर्षे "करणी" (Surds) आणि वर्गसमीकरणें (Quadriatics) आणि तसेंच भुजज्या, कोटिज्याहि आम्हांस सूक्ष्मपणें माहीत होत्या, ही गोष्ट खरोखर अभिमानास्पद आहे. आतां उपपत्ति लिहूं:—

प्र = पलभा; को = कोणशङ्कु = महाशंकू

दृग्ज्या^2 (कर्णरूप) = $\text{कोटि}^2 + \text{भुज}^2$; परंतु येथें भुज = कोटि म्हणून.

$$\text{दृग्ज्या}^2 = 2\ \text{भुज}^2 \qquad \text{..........}(1)$$

$$\text{कोणशङ्कु}^2 = \text{त्रिज्या}^2 - \text{दृग्ज्या}^2$$

$$\therefore \text{त्रिज्या}^2 = \text{को}^2 + 2\ \text{भुज}^2 \qquad \text{..........}(2)$$

पलभा; शंकुतल (श्लो० २४ प्रमाणें)

$$\frac{\text{पलभा}}{12} = \frac{\text{शंकुतल}}{\text{कोणशंकु}}$$

$$\therefore \text{शङ्कुतल} = \text{पलभा} \times \text{कोणशङ्कु} \div 12 \qquad \text{..........}(3)$$

(महाशंकु) भुज = अग्रा + पलभा (किंवा) शंकुतल (श्लोक २४ प्रमाणें)

$$[\text{म्हणून}]\ \text{भुज} = \text{अग्रा} \pm \frac{\text{पलभा} \times \text{कोणशंकु}}{१२} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (४)$$

परंतु त्रि^{२}. = को^{२}+२ भुज^२. म्हणून,

$$२\ \text{भुज}^२ = \frac{२\ \text{प्र}^२ \times \text{को}^२}{१४४} \pm \frac{२ \times २\ \text{प्र. को अग्रा}}{१२} + २\ \text{अग्रा}^२$$

$$= \frac{\text{प्र}^२\ \text{को}^२}{७२} \pm \frac{\text{प्र. को. अग्रा}}{३} + २\ \text{अग्रा}^२$$

म्हणून (२) प्रमाणें, $\text{को} + \frac{\text{प्र}^२\ \text{को}^२}{७२} \pm \frac{\text{प्र. को. अग्रा}}{३} + २\ \text{अग्रा}^२ = \text{त्रि}^२$

वरील समीकरणाला ७२ नीं गुणून:—

$$७२\ \text{को}^२ + \text{प्र.}^२\ \text{को}^२ \pm २४\ (\text{प्र. को. अग्रा}) + १४४\ \text{अग्रा}^२ = ७२\ \text{त्रि}^२$$

$७२\ \text{को}^२ + \text{प्र}^२ = \text{को}^२\ (\text{प्र}^२ + ७२)$, म्हणून

$\text{प्र}^२ + ७२$ ह्यांनीं भागून

$$\text{को}^२ \pm \frac{२४\ \text{प्र. को. अग्रा}}{\text{प्र}^२ + ७२} = \frac{७२\ \text{त्रि}^२ - १४४\ \text{अग्रा}^२}{\text{प्र}^२ + ७२}$$

ह्यांत $\frac{१२\ \text{प्र.} \times \text{अग्रा}}{\text{प्र}^२ + ७२}$ .... "ह्याला फल" संज्ञा दिली. तसेंच

$१४४\ (\frac{\text{त्रि}^२}{२} - \text{अग्रा}^२) - \text{प्र}^२ + ७२$ ही "करणी" (Surd)

आणि ($\frac{\text{त्रि}^२}{२}$ हें त्रिज्या वर्गार्ध) म्हणून;

कोणशंकु^{२} ± २ फ. को = करणी; ह्यांत फल^२ मिळवून

कोणशंकु^{२} ± २ फ को + फल^२ = करणी + फल^२; नंतर ह्यांचें वर्गमूळ काढलें.

∴ कोणशंकु ± फल = $\sqrt{(\text{करणी} + \text{फल}^२)}$

तेव्हां —कोणशंकु = $\sqrt{(\text{करणी} + \text{फल}^२)} \pm \text{फल}$

याप्रमाणें कोणशंकु सिद्ध झाला.

तत्त्रिज्यावर्गविश्लेषान्मूलंदृग्ज्याभिधीयते ॥

कोणशंकुचा वर्ग त्रिज्या वर्गातून वजा करून बाकी राहील, तिच्या वर्ग मूळाला दृग्ज्या म्हणतात.

——:——

स्वशंकुनाविभज्याप्तेदृक्त्रिज्येद्वादशाहते ॥ ३३ ॥

दृग्ज्या आणि त्रिज्या ह्यापैकीं प्रत्येकास द्वादशांगुल शंकूनें गुणून कोणशङ्कुनें भागिलें असता (अर्थात् $\frac{\text{दृग्ज्या} \times १२}{\text{कोणशंकू}}$ पासून) "छाया" कळतें आणि $\frac{\text{त्रिज्या} \times १२}{\text{कों}}$ ह्यापासून छायाकर्ण कळतो.

स्पष्टीकरण:—सूर्य उदय पावल्यापासून मध्ययाम्योत्तरावर येईपर्यंत जितका परिध्विभाग आक्रमण होतो त्यांत ज्या प्रदेशांत सूर्य बरोबर ४५ अंशावर येतो त्यावेळीं तो **कोणस्थ** आहे असें म्हणतात. अशावेळीं त्याचें सममण्डलापर्यंत जें लम्बरूप अन्तर तेंहि ४५ अंशच जर होईल तर त्यावेळीं दक्षिण गोलांत (आकाशविषुवाच्या दक्षिणेस) कोणशङ्कूची किंमत शून्य असते, परंतु उत्तर गोलांतमात्र चारी कोणामध्यें चार कोणशङ्कू उत्पन्न होतात. ज्या वेळीं "भुज" आणि "कोटि" समसमान होतात अशा स्थानीं सूर्य येतो तेव्हांच दृग्ज्या आणि **कोणशंङ्कू** हे उत्पन्न होतात. इतर वेळीं सूर्याच्या स्थानापासून भूतलापर्यंत जो लम्ब असतो त्याला महाशंकू ही संज्ञा आहे; म्हणून ह्या श्लोकांतील उपपत्ति मागें २०, २१ श्लोकांत जी उपपत्ति सांगितली तिचाच पर्याय आहे.
(मागील उपपत्ति:—महाशंकू : दृग्ज्या : : द्वादश : पलभा

∴ दृग्ज्या × १२ ÷ महाशंकू = छाया; आणि त्रि×१२ ÷ महाशंकू = छायाकर्ण

——:——

नतांश हे "अ" (स्वस्तिका) पासून मोजतात—जसें:—
अ–सू, असू′, आणि असू″ हे सूर्याचे निरनिराळ्या स्थानाचे नतांश आहेत.
अ–वि हे विषुवाचे नतांश; नतांश म्हणजे झुकाव.
विषुवाच्या नतांशांना अक्षांश म्हणतात क्रान्ति "वि" पासून मोजतात.
विसू ही क्रांति; अ–सू हे नतांश. हे एकाच दिशेचे असल्यास असू = (विसु + अवि)
= क्रान्ति + अक्षांश.

अ हा स्वस्तिक बिन्दू क्षि–ति हे क्षितिज; अपु–हें पूर्वापरवृत्त; विपु हें विषुव; आणि सू, सू′, सू″ हीं सूर्याचीं स्थानें आहेत; पैकीं, सू हें विषुवाचें दक्षिणेस, सू′ हें उत्तरेस परंतु वि आणि अ ह्याचेमध्यें म्हणजे "अ" चे दक्षिणेस आह, आणि सू″ हें "वि" आणि "अ" ह्या दोहोंचेहि उत्तरेस आहे. असू′ = अक्षांश – क्रान्ति; असू″ = क्रान्ति – अक्षांश

क्रान्ति आणि नतांश.

क्रान्ति दक्षिण आणि अक्षांश उत्तरेचे म्हणजे भिन्न दिशाचे असल्यास
नतांश = अक्षांश + क्रान्ति, परंतु क्रान्ति उत्तर, आणि अक्षांशहि उत्तरेचे असल्यास
नतांश = (असू′) } अक्षांश – क्रान्ति,
नतांश = (असू″) } क्रान्ति – अक्षांश

" अ " स्वस्वस्तिक,	अ – व पूर्वापरवृत्त
त्रि – पुत्र = त्रिपुत्र	क्षि – ज्या = क्षितिज्या
व – र = चर–ज्या	क्षि – ति = क्षितिज.
ध्रु – व = उन्मण्डल	सू – पु = रविचें ध्रुवसूत्र
अ – क्षि = अहोरात्र (द्युज्या)	त्रि पु व र = अन्त्या (त्रिपुत्र + चर) Semi diurnal Arch
त्रि – पु = अग्रा	
व – ज्या = अग्रा (Amplitude)	अ – ज्या = हृति
	सू – ज्या = इष्टहृति

$$\frac{\text{इष्टान्त्या}}{\text{अन्त्या}} = \frac{\text{इष्टहृति}}{\text{हृति}}$$

उत्तर गोलामध्यें { अन्त्या – नतोत्क्रमज्या = इष्टान्त्या.
र – क्षि + क्षितिज्या = इष्टहृति.

दक्षिण गोलांत { क्षि – क्षितिज्या = इष्टहृति
त्रिज्या – चर–नतोत्क्रमज्या = इष्टान्त्या.

द्युज्या + क्षितिज्या = हृति उत्तरगोले
द्युज्या – क्षितिज्या = हृति दक्षिणगोले
दिनार्ध – उन्नतकाल = नतकाल.

——:——

छायाकर्णौतु कोणेषु यथास्वंदेशकालयोः ॥
त्रिज्योदक्चरजायुक्ता याम्यायां तद्विवर्जिता ॥ ३४ ॥

उत्तर गोलांत (विपुव) त्रिज्येमध्यें चरज्या मिळविली असतां आणि (दक्षिण गोलांत) वजा केली असतां अन्त्या (Semi diurnal Arch) निष्पन्न होते. अन्त्येमध्यें नतोत्क्रमज्या वजा केल्यानें इष्टान्त्या मिळते इष्टान्त्येला द्युज्येनें गुणून त्रिज्येनें भागिलें असतां हृति - (.अहोरात्र–दिनार्ध) उत्पन्न होते.

अन्त्यानतोत्क्रमज्योनास्वाहोरात्रार्धसङ्गुणा ॥
त्रिज्याभक्ताभवेच्छेदोलम्बज्याघ्नोऽथभाजितः ॥ ३५ ॥
त्रिभज्ययाभवेच्छङ्कुस्तद्वर्गपरिशोधयंत् ॥
त्रिज्यावर्गात्पदं दृग्ज्या छायाकर्णौतुपूर्ववत् ॥ ३६ ॥

हृतीला लंबज्येनें (कोटिज्येनें)गुणून त्रिज्येनें भागावें म्हणजे शङ्कु निष्पन्न होतो. त्रिज्यावर्गांतून शङ्कुवर्ग वजा करून बाकी राहील तिचें वर्गमूळ काढावें म्हणजे दृग्ज्या कळते; आणि दृग्ज्येपासून छाया, आणि छायाकर्ण उपलब्ध होतात.

स्पष्टीकरणः—द्युज्येस : जशी त्रिज्या : : हृति : अन्त्या

$$\therefore \frac{\text{त्रिज्या} \times \text{हृति}}{\text{द्युज्या}} = \text{अन्त्या} \qquad (१)$$

$$\therefore \text{हृति} = \frac{\text{द्युज्या} \times \text{अन्त्या}}{\text{त्रिज्या}} \qquad (२)$$

$$\frac{\text{क्षितिज्या}}{\text{चरज्या}} = \frac{\text{हृति}}{\text{अन्त्या}}$$ (स्पष्टाधिकार श्लोक ६१)

$$\therefore \text{अन्त्या} = \frac{\text{चरज्या} \times \text{हृति}}{\text{क्षितिज्या}} \qquad (३)$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore \text{हृति} &= \frac{\text{अन्त्या} \times \text{क्षितिज्या}}{\text{चरज्या}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &= \text{द्युज्या} + \text{क्षितिज्या}\end{aligned}\right\} (४)$$

$$\frac{\text{हृति}}{\text{दिनार्ध शंकू}} = \frac{\text{त्रिज्या}}{\text{लम्बज्या}};\quad \frac{\text{महाशंकू}}{\text{हृति}} = \frac{१२}{\text{अक्षकर्ण}}$$

$$\therefore \text{दिनार्ध शङ्कू} = \frac{\text{लम्बज्या} \times \text{हृति}}{\text{त्रिज्या}} \qquad [१]$$

$$\text{त्रिज्या}^2 - \text{कोणशङ्कू}^2 = \text{दृग्ज्या}^2$$

$$\therefore \text{दृग्ज्या} = \sqrt{(\text{त्रिज्या}^2 - \text{कोणशंकू}^2)}$$

$$\frac{\text{दृग्ज्या}}{\text{महाशंकू}} = \frac{\text{छाया}}{\text{द्वादशाङ्गुल}};\quad \frac{\text{त्रिज्या}}{\text{महाशंकू}} = \frac{\text{मध्यान्ह छायाकर्ण}}{\text{द्वादशांगुल}}$$

$$\therefore \text{छाया} = \frac{१२ \times \text{दृग्ज्या}}{\text{महाशंकू}} \qquad [२]$$

$$\therefore \text{छायाकर्ण} = \frac{१२ \times \text{त्रिज्या}}{\text{महाशंकू}} \qquad [३]$$

ह्या प्रमाणें प्रक्रिया सिद्ध झाली.

अभीष्टच्छाययाभ्यस्तात्रिज्यातत्कर्णभाजिता ॥
दृग्ज्या तद्वर्गसंशुद्धात्रिज्यावर्गाच्चयत्पदम् ॥ ३७ ॥
शंकुः स त्रिभजीवाघ्नः स्वलम्बज्याविभाजितः ॥
छेदः स त्रिज्ययाभ्यस्तः स्वाहोरात्रार्धभाजितः ॥ ३८ ॥
उन्नतज्या तया हीना स्वान्त्या शेषस्य कार्मुकम् ॥
उत्क्रमज्याभिरेवं स्युः प्राक्पश्चार्धनतासवः ॥ ३९ ॥

इष्टकालिक छायेनें त्रिज्येस गुणावें आणि छायाकर्णानें भागावें म्हणजे दृग्ज्या मिळते; त्रिज्यावर्गांत—दृग्ज्या वर्ग उणा केला आणि बाकी राहिल तिचें वर्गमूळ काढलें म्हणजे शंकू उपलब्ध होतो. शंकू आणि त्रिज्या ह्यांच्या गुणाकाराला लम्बज्येनें भागिलें असतां हृति उत्पन्न होते.

हृतिला त्रिज्येनें गुणून द्युज्येनें भागिले म्हणजे इष्टान्त्या (उन्नतज्या) उपलब्ध होते. ह्या इष्टान्त्येला अन्त्येमध्यें वजा केल्यानें नतकालोत्क्रमज्या निष्पन्न होते. हिलाच "शर" अशी संज्ञा आहे. नतोत्क्रमज्येचें चाप (arc) केलें म्हणजे त्या पासून नतकालाचें "असू" समजतात. हे "नतासु" पूर्वार्ही पूर्वनत, आणि अपराह्णीं पश्चिमनत असतात.

स्पष्टीकरणः—ह्यांतील विषय पूर्वीच येऊन गेला आहे. त्याची प्रक्रियाः—

$$\frac{\text{छाया}}{\text{छायाकर्ण}} = \frac{\text{दृग्ज्या}}{\text{त्रिज्या}}$$

$$\therefore \text{दृग्ज्या} = \frac{\text{छाया} \times \text{त्रिज्या}}{\text{छायाकर्ण}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (१)$$

$$\text{दृग्ज्या} = \text{त्रिज्या} - \text{शंकुचापोत्क्रमज्या} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

$$\text{शङ्कु} = \text{त्रिज्या} - \text{दृग्ज्याचापोत्क्रमज्या} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

$$\text{अन्त्या} - \text{नतोत्क्रमज्या} = \text{इष्टान्त्या} \qquad \text{अर्थात्}$$

$$\text{अन्त्या} - \text{इष्टान्त्या} = \text{नतोत्क्रमज्या} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (४)$$

नतोत्क्रमज्येला ' शर ' म्हणतात.

$$\frac{\text{शर} \times \text{द्युज्या}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{\text{शर} \times \text{क्षितिज्या}}{\text{चरज्या}} = \text{फल}.$$

$$\text{हृति} - \text{फल} = \text{इष्टहृति} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (५)$$

इष्टाग्राघ्नी तु लम्बज्या स्वकर्णाङ्गुलभाजिता ॥
क्रान्तिज्या सा त्रिजीवाघ्नी परमापक्रमोद्‌धृता ॥ ४० ॥

इष्टाग्रेला लम्बज्येनें गुणून इष्टकालीन छायाकर्णानें भागावें म्हणजे इष्टकालीन क्रान्तिज्या समजून येते; इष्टक्रान्तिज्येला त्रिज्येनें गुणून परमक्रान्तिज्येनें भागिलें असतां इष्ट भुजज्या येते. त्याचा भुज केला म्हणजे त्या पासून (श्लोक १९) प्रमाणें सायन सूर्य काढतां येतो.

स्पष्टीकरणः—अहोरात्र वृत्त (किंवा उदयास्त वृत्त) ह्याच्या अग्रापासून पूर्व किंवा पश्चिम बिंदुपर्यंत क्षितिजावर मोजलेलें जें चापात्मक अन्तर त्याला अग्रा म्हणतात. इष्ट वर्तुळामध्ये-पूर्वापार वृत्तावर जी अग्रा दिसते ती इष्टाग्रा;

त्रिज्येला : जशी अग्रा :: तशी इष्टकर्णाला : इष्टाग्रा.

$$\frac{\text{इष्टाग्रा} \times \text{त्रिज्या}}{\text{इष्ट कर्ण}} = \text{अग्रा. (Amplitude)} \;\ldots\ldots \qquad (१)$$

इष्ट कर्णाला : कोटिज्या :: अग्रेला : क्रान्तिज्या

$$\frac{\text{कोटिज्या} \times \text{अग्रा}}{\text{इष्ट कर्ण}} = \text{क्रान्तिज्या} \;\ldots\ldots\ldots \qquad (२)$$

परमक्रान्तिला (Obliquity) : त्रिज्या :: तसा इष्टक्रान्तिला : भुज

$$\therefore \quad \frac{\text{इष्टक्रान्ति} \times \text{त्रिज्या}}{\text{परमक्रान्तिज्या}} = \text{भुज} = \text{सायनसूर्य (Sun's Longitude)}$$

—:—

तच्चापं भादिकं क्षेत्रं पदैस्तत्रभवो रविः ॥
इष्टेऽह्निमध्ये प्राक्‌पश्चाद् धृते बाहुत्रयान्तरे ॥ ४१ ॥
मत्स्यद्वयान्तरयुते स्त्रिस्पृक् सूत्रेणभाभ्रमः ॥

इष्ट दिवशीं पूर्वह्णीं किंवा अपराह्णीं तीन भुजाग्र बिन्दु घ्यावे आणि त्या बिन्दूंपैकीं मधल्या बिन्दूपासून वर्तुळ काढून बाजूच्या बिन्दूंनीं कौंस (मत्स्य) सिद्ध करावे; व त्यांच्या मुखाकडील व मागील बिन्दूंतून सरळ रेषा काढून मुखाच्या दिशेकडे वाढवाव्या. ह्या रेषा जेथें एकत्र मिळतील तो बिन्दु मध्य मानून कोणत्याहि भुजाग्र बिन्दूच्या त्रिज्येनें महावर्तुळ काढिलें असतां तें तिन्ही भुजाग्र बिन्दूंना स्पर्श करील. ह्या वर्तुळाला भा—भ्रमवृत्त म्हणतात.

स्पष्टीकरणः—ह्यातील प्रकारचा नीट बोध होत नाहीं, व ह्या प्रकार भास्कराचार्यांस मान्य नाहीं, म्हणून उपपत्ति देण्याचा प्रयत्न केला नाहीं.

त्रिभद्युकर्णार्धगुणाः स्वाहोरात्रार्धभाजिताः ॥ ४२ ॥
क्रमादेकाद्वित्रिभज्यास्तच्चापानि पृथक् पृथक् ॥
स्वाधोधः परिशोध्याथमेषाल्लङ्कोदयासवः ॥ ४३ ॥

एकराशिची म्हणजे तीस (३०) अंशांची, त्याचप्रमाणें ६० साठ अंशांची, आणि *तिसरी तीन राशींची अर्थात् ९० अंशांची अशा निरनिराळ्या भुजज्या घ्याव्या; त्यांपैकीं प्रत्येक* भुजज्येला तीन राशींज्या परम क्रान्ति कोटिनें गुणावें,व आपआपल्या क्रान्तिच्या कोटिज्येनें भागावें व भागाकार निर्दिष्ट भुज—कोटिज्यांचीं चापें करावीं. एक राशीच्या भागाकाराचें जें चाप येईल तेंच मेष राशिच्या लङ्कोदयाचे उदयासु होतात. दोन राशींच्या भागाकारापासून जें चाप येतें त्यांतून पहिलें चाप वजा केलें म्हअजे वृषभराशिचें लंकोदयासु येतात; आणि तीन राशिच्या चापांतून दोन राशिचें चाप उणें केलें म्हणजे मिथुन राशिचें लंकोदयासु येतील.

स्पष्टीकरणः—लंकोदय म्हणजे निरक्ष प्रदेशीं क्षितिजावर मेषादि राशिंचे पूर्ण उदय होण्यास जो काल लागतो तो. ह्याच विषुवक्षितिजाचा उत्तर आणि दक्षिण अक्षांशांतील प्रदेशांत **उन्मण्डल** ह्या नांवानें निर्देश करितात.

त्रिज्येला : जशी विषुवस्थकोटिज्या :: तशी मेषादि राशिना किती ?

$$\text{याचें उत्तर} = \frac{\text{विषुवपरमको} \times \text{मेषादिज्या}}{\text{त्रिज्या}} \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

द्युज्येला : राशिकोटिज्या :: तशी त्रिज्येला किती ?

$$\text{याचें उत्तर} = \frac{\text{राशिकोटिज्या} \times \text{त्रिज्या}}{\text{द्युज्या}} \quad (२)$$

(१) मधील किंमत (२) मध्यें ठेऊन

$$\text{उत्तर येतें तें} = \frac{(\cos obl)\ \text{परमकोटिज्या} \times \text{मेषादिज्या}}{\text{द्युज्या}} = \text{Sin R. A.}$$

क्रान्ति कोटिज्येला द्युज्या (cos Declination) म्हणतात.

मिथुन, वृषभ आणि मेष ह्यांचेंच उदयासु क्रमानें कर्क, सिंह, आणि कन्या ह्यांचे लंकोदयासु होतात. व तेच पुनः उलट क्रमानें तुलादि सहा राशींचे उदयासु असतात.

मेषाचे लंकोदयासु १६७०
वृषभाचे ,, ,, १७९५
मिथुनाचे,, ,, १९३५ असे आहेत.

ह्या पेक्षां भास्कराचार्यांचा नियम विशेष सोईचा आहे. कारण त्यांत ९० अंशांच्या कोटिज्येची किंमत घेणेचें कारणच पडत नाहीं. आचार्य म्हणतात कीं, एक, दोन, आणि तीन राशींच्या भुजज्यांना (प्रत्येकीं), त्रिज्येनें (=३४३८ नें) गुणावें आणि स्वकीय द्युज्येनें (३२१८, । ३३६६ । ३४३८) भागून त्या भागाकारापासून निर निराळीं चापें आणावी. ह्या नियमानें आक्रम भोगापासून (Ecliptic Longitude पासून) विषुव-भोग (Degrees of R. A.) साध्य करतां येतात.

खागाष्टयोऽर्थगोऽगैकाः शरत्र्यङ्कहिमांशवः ॥
स्वदेशचरखण्डोना भवन्तीष्टोदयासवः ॥ ४४ ॥
व्यस्ताव्यस्तैर्युताः स्वैः स्वैः कर्कटाद्यास्ततस्त्रयः ॥
उत्क्रमेण षडेवैते भवन्तीष्टास्तुलादयः ॥ ४५ ॥

ह्यांत लंकोदयांना आपआपल्या स्वदेशीय उदयाचे " असु " साध्य करण्याचा नियम सांगतातः—

नंतर मेष, वृषभ, आणि मिथुन ह्यांच्या लंकोदयांत स्वकीय चरखण्डें वजा केल्यानें स्वोदय उपलब्ध होतात. तींच चरखण्डें उलट क्रमानें मिथुन, वृषभ, मेष ह्यांच्या लंकोदयांत मिळविलीं असतां कर्क, सिंह आणि कन्या ह्यांचें स्वोदय सिद्ध होतात, आणि तेच उलट क्रमानें तुलादि राशींचे उदयासु होतात.

स्पष्टीकरणः—हीं चरखण्डें आणण्याची रीति भास्कराचार्यांनीं उत्तम रीतीनें स्पष्ट केली आहे, परंतु त्यांतील स्थूल रीतिच हल्ली प्रचारात आहे. ती अशी कीं, पलभेस १०, ८, ३$\frac{1}{3}$ ह्या पैकीं प्रत्येक पदानें गुणावें म्हणजे गुणाकार पलात्मक येतो. हींच चरखण्डें होत. ह्यापैकीं पहिलें मेषोदयांत, दुसरें वृषभोदयांत, आणि तिसरें मिथुनोदयांत वजा करावें म्हणजे स्वोदय येतात. नंतर तिसरें मिथुनोदयांत, दुसरें वृषभोदयांत ह्याप्रमाणें मिळविलीं असतां कर्कादि उदय येतात.

ह्या चरखण्डांना Ascensional Difference म्हणतात. ज्या राशीचा स्वक्षितिजामध्यें उदय (उन्मण्डलाच्या) अगोदर होतो त्यांचीं चरखण्डें ऋण असतात.

राशिच्या उदयासुवरून राश्यंशांना अनुरूप असे भुक्तासु, भोग्यासु काढतां येतात.

गतभोग्यासवः कार्या भास्करादिष्टकालिकात् ॥
स्वोदयासुहता भुक्तभोग्याभक्ताः खवाह्निभिः ॥ ४६ ॥
अभीष्टघटिकासुभ्यो भोग्यासून् प्रविशोधयेत् ॥
तद्वत्तदेष्यलग्नासून् एवं यातां स्तथोत्क्रमात् ॥ ४७ ॥
शेषंचेत् त्रिंशताभ्यस्तमशुद्धेन विभाजितम् ॥
भागहीनंच युक्तंच तल्लग्नं क्षितिजेतदा ॥ ४८ ॥

(सायन) सूर्य ज्या राशिच्या ज्या अंशात असेल त्या राशिचा तोच अंश औदयिक लग्न असतें; म्हणून सूर्याच्या भुक्त व भोग्य राशिच्या उदयासुवरून भुक्तासु, आणि भोग्यासु आणावे ते असेः भुक्तांश किंवा भोग्यांश ह्यांपैकीं एकानें उदयासूनां गुणून तिसांनीं भागावें. म्हणजे भागाकार त्या राशीचे भोग्यासु येतील. नंतर इष्ट घटिकांचे असू करून त्यांतून सूर्य राशिचे भोग्यासु–आणि त्या पुढील जितक्या पूर्ण राशींचे उदयासु वजा जातील तितके करावे. राशिचे उदयासु पूर्णपणें वजा जाणार नाहींत तिला अशुद्ध राशि म्हणतात. नंतर बाकी राहिलेल्या असूंना तिसांनीं गुणून अशुद्ध राशींच्या असूनीं भागावें. म्हणजे ज्या राशीचे उदितांश येतील **तेंच लग्न.** ह्याप्रमाणें भुक्तासुवरूनहि वरील रीतीनेंच लग्न–साधन करावें.

ह्यांची उपपत्ति स्पष्ट आहे.

प्राक्पश्चान्नतनाडीभिस्तस्माल्लङ्कोदयासुभिः ॥
भानौ क्षयधनेकृत्वा मध्यलग्नंतदाभवेत् ॥ ४९ ॥

नतकाल घटिका आणि स्पष्ट (सायन) सूर्य यांच्या भुक्तांशापासून लग्नसाधन करण्याच्या पद्धतिप्रमाणें **लंकोदयापासून** याम्योत्तर लग्न साध्य करावें. ह्यालाच दशमलग्न म्हणतात. पश्चिम नतकाली भुक्तासुमध्यें पुढील लंकोदय मिळवावे आणि पूर्व नतकालाच्या असूंमध्यें सूर्याचे आणि मागील राशींचे लंकोदयासु वजा करून दशमलग्न साध्य करावें.

स्पष्टीकरणः—सावन दिनमानाच्या घटिका साठच. त्यांत मध्यरात्रीपासून मध्यान्हापर्यंतच्या अर्धाला पूर्वार्ध आणि मध्यान्हापासूनच्या उत्तरार्धाला पश्चिमार्ध म्हणतात. सूर्यपूर्वार्धीं जितका असेल तेथपासून मध्यान्हापर्यंतच्या घटि हा पूर्वनत काल. आणि पश्चिमार्धांत सूर्य असला तर मध्यान्हानंतरच्या घटिंना पश्चिम नतकाल म्हणतात. सूर्य पूर्व कपालीं असला म्हणजे दशमलग्न–राशिच्या पुढें सूर्य असतो म्हणून पूर्व–नतकालांत मागील भुक्तासु वजा करावे लागतात. अपराण्हीं दशमलग्न सूर्याच्या पुढें असतें म्हणून **भुक्तासु धन** होतात.

भोग्यासूनूनकस्याथ भुक्तासूनधिकस्यच ॥
संपिण्ड्यान्तरलग्नासूनेवं स्यात्कालसाधनम् ॥ ५० ॥

इष्टकाल साधनः—

लग्न आणि स्पष्ट (सायन) सूर्य ह्यांच्यामध्यें जर सूर्य अगोदरचा म्हणजे पूर्वी उदित असेल किंवा लग्न अगोदरचें असेल तर अगोदर उदित होण्याचे भोग्यासु आणि जो नंतरचा (पूर्व दिशेचा) असेल त्याचे भुक्तासु ह्यांची बेरीज करून त्या बेरजेंत लग्न आणि सूर्य ह्यांच्या दरम्यानचे सर्व असु मिळविले म्हणजे लग्नाच्या इष्ट घटि समजतात.

स्पष्टीकरणः—सूर्याच्या पुढें इष्टकालीन लग्न असेल तर इष्टकाल सूर्योदयानंतरचा. असतो, आणि लग्न अगोदर येईल तर ती वेळसूर्योदया पूर्वींची असणार, हें स्पष्टच आहे.

भोग्यकाल हा अगोदर उदित होणाऱ्या राश्यंशापासून प्रारंभ पावून नंतर येणाऱ्याशीं समाप्त होतो, म्हणून लग्न किंवा सूर्य ह्या पैकीं जें अगोदर (उगवेल) त्यापासून भोग्यादि मोजले पाहिजेत. कारण इष्टकाल हा सूर्योदयाच्या अनुरोधानेंच ठरतो.

सूर्यादूने निशाशेषेलग्नेऽर्कादधिके दिवा ॥
भचक्रार्धयुताद्भानोरधि केऽस्तमयात्परम् ॥ ५१ ॥

म्हणूनच स्पष्ट (सायन) सूर्यापेक्षां जर लग्न पूर्वीच उदित झालें असेल तर इष्टलग्नकाल सूर्योदयाच्या पूर्वीचा असतो. तसेंच सूर्य अगोदर क्षितिजावर आला असेल तर इष्टलग्न सूर्योदयानंतरचें असतें. आणि सूर्यापासून सहा राशीपेक्षांहि इष्टलग्नाचे राश्यंश अधिक असतील तर इष्टलग्न सूर्यास्तानंतरचें आहे असें समजावें.

स्पष्टीकरणाची आवश्यकता नाहीं.

॥ इति त्रिप्रश्नाधिकारः ॥

परिशिष्ट

ह्या अधिकारामध्यें महाशंकूच्या भुज काढावयाची रीति उपपत्तिसह दिली आहे. तथापि त्याची विशेष रीति शृङ्गोन्नति अधिकारांत आहे ती येथें देणें योग्य दिसतें. ती रीति अशी:—

अर्केन्द्वोः क्रान्ति विश्लेषो दिक्साम्ये युतिरन्यथा ।
तज्ज्येन्दुरर्काद्यत्रासौ विज्ञेया दक्षिणोत्तरा ।
मध्यान्हेन्दु-प्रभाकर्णसङ्गुणा यदि सोत्तरा ।
तदार्कघ्नाक्ष-जीवायां शोध्या योज्या च दक्षिणा ॥
शेषं लम्बज्यया भक्तं लब्धो बाहुः स्वदिङ्मुखः ।
कोटिः शंकुः तयो वर्गयुतेर्मूलं श्रुति र्भवेत् ॥

स्पष्टसूर्य आणि स्पष्टचन्द्र ह्यांची स्पष्ट क्रान्ति आणावी. दोन्ही क्रान्ति एकाच दिशेच्या असल्यास त्यांचें अंतर घ्यावें, आणि भिन्न दिशाच्या असल्यास त्यांची बेरीज करावी म्हणजे “ भुज ” होतो. तो भुज सूर्याच्या ज्या दिशेस चन्द्र असतो, त्या दिशेचा होतो. चन्द्र उत्तरेस असल्यास भुज उत्तर, आणि चन्द्र दक्षिणेस असेल तर दक्षिण ह्याप्रमाणें होतो. “ भुज ” म्हणजे भुजज्या समजावी. ह्या भुजज्येला चन्द्राच्या छायाकर्णानें गुणावें. तसेंच अक्षांशाभुजज्येला द्वादश शंकूनें गुणावें. भुज उत्तर असल्यास छायाकर्णाच्या गुणाकारांत अक्षज्या ×द्वादश शङ्कु हा गुणाकार ऋण करावा, आणि भुज दक्षिण असल्यास दोन्ही गुणाकारांची बेरीज करावी; बेरीज

असो किंवा वजाबाकी असो दोन्ही वेळीं लम्बज्येनें भागिलें असतां त्या त्या दिशेचा स्पष्ट भुज होतो. द्वादशाङ्गुल ही तर कायमचीच कोटिज्या आहे; म्हणून भुजवर्ग × कोटिवर्ग ह्यांचें वर्गमूळ काढलें असतां कर्ण येईल हें सहज लक्षांत येतें.

पुढील कृति (त्रिप्रश्न० श्लोक २७।२४।२६) प्रमाणे आहे.

लम्बज्येला : जशी त्रिज्या : : तशी क्रान्तिज्येला : अग्रा

$$\therefore \text{चन्द्राची अग्रा} = \frac{\text{त्रिज्या} \times \text{चन्द्रक्रान्तिज्या}}{\text{लम्बज्या}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (१)$$

लम्बज्या : अक्षज्या (पलभा) : : चन्द्रशंकू : शंकुतल

$$\therefore \text{शंकुतल} = \frac{\text{अक्षज्या} \times \text{चन्द्रशंकू}}{\text{लम्बज्या}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (२)$$

$\because$ अग्रा $\pm$ शंकुतल = चन्द्रभुज

ह्याचप्रमाणें

रवि अग्रा $\pm$ शंकुतल = रविभुज

परंतु सूर्यास्ताचे वेळीं रविशंकू (altitude) शून्य असतो.
म्हणून शंकुतल ही शून्य होतें त्यामुळें (सूर्यास्तीं) अग्रा = रविभुज असें समीकरण ठरतें.
(१) आणि (२) एकत्रित करून

$$\frac{(\text{त्रिज्या} \times \text{चन्द्रक्रान्तिज्या}) \pm \text{अक्षज्या} \times \text{चन्द्रशंकू}}{\text{लम्बज्या}} = \text{चन्द्रभुज.}$$

रवि अग्रा = रविभुज.

चन्द्रभुज $\pm$ रविभुज = स्पष्टभुज

$$\therefore \frac{\text{त्रिज्या} (\text{चन्द्रक्रान्तिज्या} \pm \text{रविक्रान्तिज्या})}{\text{लम्बज्या}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{क})$$

$$\frac{\text{अक्षज्या} \times \text{चन्द्रशंकू}}{\text{लम्बज्या}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{ख})$$

क $\pm$ ख = स्पष्ट भुज

चन्द्रशंकू : त्रिज्या : : द्वादशशंकू : छायाकर्ण

$$\therefore \text{छायाकर्ण} = \frac{\text{त्रि} \times \text{द्वादश}}{\text{शंकू}} \ldots\ldots\ldots (\text{त्रिप्रश्न २६}) \ldots\ldots (३)$$



त्रिज्या : त्रिज्याभुज : : छायाकर्ण : स्पष्टभुज

$$\text{स्पष्टभुज} = \frac{\text{त्रिज्याभुज} \times \text{छायाकर्ण}}{\text{त्रिज्या}}$$

$$\text{क} \pm \text{ख} = \text{त्रिज्याभुज}$$

(ख) मध्यें छायाकर्णाबद्दल (३) ही किंमत ठेऊन

$$\frac{\text{त्रिज्या (चंक्रान्ति} \pm \text{रक्रान्ति) छायाकर्ण}}{\text{त्रि} \times \text{लम्बज्या}} \pm \frac{\text{अक्षज्या} \times \text{शंकू} \times \text{त्रि} \times \text{द्वा}}{\text{लम्बज्या} \times \text{त्रि} \times \text{शंकू}}$$

$$\text{स्पष्टभुज} = \frac{\text{(चन्द्रक्रान्ति} \pm \text{रविक्रान्ति) छायाकर्ण}}{\text{लम्बज्या}} \pm \frac{\text{अक्षज्या} \times \text{द्वादशें}}{\text{लम्बज्या}}$$

ही प्रक्रिया सिद्ध झाली.

सिद्धान्तपद्धती प्रमाणें

छायार्कानुरोधानें वर्षमानाचा निश्चय

रवि विषुववृत्तावर येण्याचे पूर्वी एक किंवा दोन दिवस आधीं त्याचे उन्नतांश मध्यान्हवृत्तावर प्रत्यक्ष वेधानें ठरवावें. त्यांना "रो" म्हणावें. नंतर दुसऱ्या वर्षी " रो " इतके उन्नतांश होण्याचे पूर्वी एक दिवस पुन: मध्यान्ह–उन्नतांश मोजावे; त्यांना " आ " म्हणाव; नंतर दुसरें दिवशींहि पुन: दुसऱ्या खेपेस मध्यान्होन्नतांश पहावे. ते " रो " पेक्षां कमी असल्यास त्याचे पुढील दिवशीं पुन: मध्यान्हीं उन्नतांश मापावे. हे " रो " पेक्षा अधिक येतील; त्यांना "ह" म्हणावें. ह्याप्रमाणें " आ " " रो " " ह " असे तीन उन्नतांश समजले; त्यातील " आ " उन्नतांश " रो " पेक्षां कमी आणि " ह " हे " रो " पेक्षा जास्त आहेत. " आ " पासून " ह " इतके उन्नतांश होण्यास एकच दिवस किंवा फार तर दोन दिवस लागले असते. ह्या अन्तराल " का " असें म्हणू. नंतर उन्नतांशांच्या अन्तरावरून रविची क्रांन्ति साधावी.

ह्यात (" ह–आ ") इतक्या क्रान्तिला जर " का " इतका काल :: तर (रो–आ) इतक्या क्रान्तिला किती ? ह्याप्रमाणानें रो इतकी क्रान्ति एक वर्षानें केव्हा झाली तें समजेल. नंतर शून्य क्रान्ति होण्याचा काल त्रैराशिकानें काढून तो वरील कालात मिळवावा. म्हणजे **सांपातिक वर्षमानाचा** काल सूक्ष्म येतो; व त्याला उच्चगतीचा संस्कार केला म्हणजे **अगदीं** सूक्ष्म असें **सांपातिक वर्षमान** समजतें, परतु **नाक्षत्र वर्षमान** मात्र इतक्या सहजासहजी साध्य होत नाहीं.

त्रिप्रश्नाधिकाराचा उपसंहार

मध्यमाधिकार, स्पष्टाधिकार आणि त्रिप्रश्नाधिकार ह्या तीन अधिकारांमध्यें जे विषय आलेले आहेत त्यांच्या कार्यक्षेत्रात ग्रहगणिताचा बहुतेक भाग पूर्णच होतो. **आयनदृक्कर्म** आणि **आक्षदृक्कर्म** अशासारखे एक दोन महत्त्वाचे संस्कार जे त्रिप्रश्नाध्यायातच यावयास पाहिजेत ते मात्र येथें सांगितले नाहींत, तथापि त्यांची आवश्यकता जेथें आहे त्याच प्रकरणांत ते सांगितलें आहेत. पुढील विषय म्हणजे आतांपर्यंतच्या गणित प्रक्रियेच्या उपयोगाचे वेगवेगळे प्रकार ह्यापेक्षां त्यांचें स्वरूप निराळें नाहीं. रवि चन्द्राचीं ग्रहणें, ग्रहयुति, नक्षत्र–ग्रह–युति, त्यांचे क्षितिजास्तोदय, प्रकाशास्तोदय, क्रांतिसाम्य ह्याच विषय पुढील अधिकारात आहे. आणि त्यांतच **आयन** व **आक्ष** अशा दोन्ही दृक्कर्मांची आवश्यकता असते; व तेथेंच त्यांचा विशेष उपयोग होतो.

प्रत्येक ग्रह त्याच्या स्वतःच्या कक्षावृत्तात फिरतो, परंतु सूर्यावरून पाहणारास तो जेथें दिसेल तें स्थान स्पष्टाधिकारांत मन्दस्पष्ट ह्या संज्ञेनें दर्शविलें आहे. पृथ्वीवरील लोकांस सूर्यलोकावरून दिसणाऱ्या ग्रहस्थितिचें प्रत्यक्ष ज्ञान होणें अशक्य, म्हणून पृथ्वीवरूनच तो ग्रह **आक्रमवृत्तावर** कोठें येतो, आणि विशिष्ट दिवशीं विशिष्ट वेळेस तो आक्रमवृत्तामध्यें किंवा त्याच्या अमुक अंशाच्या उत्तरेस किंवा दक्षिणेस इतक्या अंतरावर आहे हें वर्तवावें लागतें. हेंच स्पष्टाधिकारामध्यें मान्द आणि शैघ्र अशा दोन प्रक्रियेनें कसें वर्तवावें तें सांगितलें आहे. स्पष्टाधिकारांत इतकाच विषय आहे.

परंतु प्रत्येक ग्रह पूर्वक्षितिजातून उदय पावतो तोहि काळ बिनचूक समजला पाहिजे. तसेच ख मध्यांतून दक्षिणोत्तर जाणारें जें मध्यान्हवृत्त त्या वृत्तावर तो उदय पावल्यापासून किती वेळानें येईल हेहि ग्रहण गणितांत अवश्य समजावें लागतें. ह्या गणितांत आयन आणि आक्ष दृक्कर्मांची जरूर असते म्हणून त्रिप्रश्नाधिकारात त्यांचा समावेश केला नसावा.

सिद्धान्तकारांनीं मोठ्या कुशलतेनें गोलीय त्रिकोणाची उपपत्ति समपृष्ठस्थ त्रिकोणांच्या प्रमेयांनीं लाविली आहे. त्यामुळें प्रक्रियेंत भिन्नता सहजच आली; आणि दुसरें असें कीं, सिद्धांतीय त्रिकोणमितिमध्यें फक्त भुजज्या, (Sine) कोटिज्या (Cosine) आणि उत्क्रमज्या (Versed sine) ह्यांचेच सहाय घेतलें आहे. पाश्चात्य पद्धतिच्या आधुनिक गणितांत Tangent (स्पर्शरेषा) आणि Cotangent (को स्पर्शरेषा) हे दोन अवच्छेदक (Ratios) ज्यास्त स्वीकारले आहेत; त्यामुळें त्रिकोणमितिची आधुनिक प्रक्रिया अधिक सुकर झाली; तथापि दोन अडीच हजार वर्षापूर्वींहि गोलीय त्रिकोणाचे उपपादन सरळ त्रिकोणमितीनें त्या वेळच्या गणितज्ञांनीं करावें हें आतांदेखील कौतुकास्पदच मानलें जाईल.

त्रिप्रश्नाधिकारांत आयनदृक्कर्म आणि आक्षदृक्कर्म ह्यांची रीति सांगणें अवश्य होतें. परंतु ती रीति नवीन विद्यार्थ्यास समजावयास थोडी कठीण आहे. गोलीय त्रिकोणमितिच्या पद्धतिनें आयन दृक्कर्म फार त्वरित होतें. आक्षदृक्कर्म त्यापेक्षां समजावयास कठिण तरी तेहि लवकर उलगडतें परंतु प्राचीन सिद्धान्तकारांनीं सरळ त्रिकोणमितिचाच आश्रय केल्यानें आणि स्पर्श (Tangent) को. स्पर्शरेषा ह्यांचा उपयोग न केल्यानें तुलनेनें पाहतां प्राचीन गणितांत थोड्या समीकरणें जास्त होतात व

रीति लांबलचक वाटते. तथापि परिणामाच्या दृष्टीनें थोड्या कलांपेक्षां जास्त फरक पडत नाहीं. लङ्कोदय अथवा निरक्षोदय पद्धतिनें सूर्याचे विषुवांश (R. A.) कळतात. परंतु आक्रमवृत्तापासून (म्ह. Ecliptic पासून) अन्तरावर असलेले चन्द्र, ग्रहनक्षत्रें इत्यादिकांचे क्षितिजोदयास्त आणि युत्या ह्यांचे साधन आयनदृक्कर्म आणि आक्षदृक्कर्म ह्या संस्काराशिवाय होत नाहीं. म्हणून हे संस्कार त्या त्या प्रकरणांतच सांगितले आहेत.

आणखी एक विषय जो त्रिप्रश्नाधिकारांत वास्तविक येऊंच शकत नाहीं तो **अयनांशाचा प्रश्न होय.** ह्या त्रिप्रश्नाधिकारांमध्यें भलत्याच जागीं निष्कारण आला आहे. वस्तुत: अयनांशाचा प्रश्न हा खगोल वर्णनाध्यायाचा विषय आहे. कारण संपाताच्या परिभ्रमणाची उपपत्ति व्यावहारिक गणितात येऊं शकत नाहीं. शिवाय त्रिप्रश्नोक्त आयनांशांत बरीच चुकी आहे. त्यामुळें हे तीन चार श्लोक त्रिप्रश्नांमध्यें प्रक्षिप्त आहेत असें दिसतें.

अयनांशाचे श्लोक प्रक्षिप्त आहेत असें ठरण्याचें आणखी एक महत्त्वाचें कारण असें कीं, सूर्यसिद्धान्त हा ग्रंथ मुख्यत्वेंकरून केवळ वेध **आणि वेध-गणित** ह्यांचा आहे. वेध हे छाया, उन्नतांश, नतांश विषुवांश इत्यादि गोलीय. त्रिकोणपद्धतिनें घ्यावयाचे असतात. त्यांतील चापीय कोन हे **चल** म्हणजे बदलणारे असतात. संपात **चल** तसाच संपातकोन Obliquity हि **चल** म्हणजे कमी ज्यास्त होणारा आहे. त्यामुळें उदयलग्न **चल**, ग्रहांचीं मन्दफलें चल, व कक्षापातहि **चल** अशा सर्वच प्रकार गणितांत **चल** आहे. ह्या **चल** गणितालाच **सायन गणित** म्हणतात. त्यामुळें सूर्य-सिद्धान्तांतील गणित आधुनिक गणितपद्धतीप्रमाणें **सायनच** आहे. परंतु तेवढ्यामुळें प्राचीन पंचांग पद्धति मात्र सायन होऊं शकत नाहीं. कारण गणित प्रकारामध्येंहि **आक्रमवृत्त** Ecliptic आणि **शर** Latitude हे अचल आहेत. आणि वैदिक **पंचांग पद्धतिहि** अचल म्हणजे **निरयनच** आहे. गणित मात्र **सायन** घ्यावें लागतें. युरोपियन Almanac मध्येहि सायन निरयन हा भेद आहेच आणि युरोपियन **गणिताचा उपयोगहि निरयन** आहे. ज्यास्त महत्व **उपयोगाला** आहे. साधनाला तितकें महत्व नाहीं म्हणूनच आपल्या प्राचीन परंपरेंत गणितपद्धति सायन स्वीकारली असून-हि प्राधान्य निरयनासच दिलें आहे. सूर्यसिद्धान्तांतील वर्णनामुळें पुढील ग्रंथकारांची समजूत अशी झाली कीं, सिद्धान्तगणिताची पद्धतिहि निरयनच आहे. त्यामुळें आपल्या गणित पद्धतिमध्यें त्यांना **अयनांशाचा** स्वीकार करावा लागला. हा प्रकार सूर्यसिद्धांतामध्यें नाहीं. ह्यावरून प्रचलितें सूर्यसिद्धांत हा फार **प्राचीन पद्धतीचा ग्रंथ** आहे हेंच सहज सिद्ध होतें. त्यांतील गणित चल-त्रिकोण मितिचें असल्यानें अर्थातच तें **सायन** आहे आणि ग्रंथातील पद्धतिला अनुसरून गणित केल्यास तें बिनचूक येऊन अयनांशाचा स्वीकार करण्याचें कारणहि पडत नाहीं. त्यावरून गणित पद्धति सायनच आहे असें निर्विवाद ठरतें. परंतु त्या गणिताचा उपयोग मात्र **अचल** अशा तारकाचक्रावर आधिष्ठित झालेल्या नक्षत्र पद्धतिकडे केला असल्यानें वैदिक अथवा **भारतीय** पंचांग मात्र **सर्वथैव** निरयनच आहे. नक्षत्रें व नक्षत्र पद्धति **अचल** असल्यानें चैत्रादि-मास-पद्धतिहि अचल आहे. त्याकारणानें चैत्रादि-मास-निदर्शक असें कोणतेंहि पञ्चाङ्ग सायन असूं शकणारच नाहीं.
